каждого класса возможен непрерывный переход от одного репера к другому, а от одного класса к другому непрерывный переход невозможен. Полученное разбиение на реперы данной и противоположной ориентаций аналогично рассмотренному в вещественном аффинном пространстве. Разница только в том, что сейчас нас интересуют не любые аффинные, а лишь ортонормированные реперы; это приводит и в *комплексном* случае к той же картине (в то время как комплексные *аффинные* реперы на два класса не распадаются).

§ 50. Псевдоортогональные преобразования

Рассмотрим теперь случай, когда (49.1) дает преобразование репера $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$ *в псевдоевклидовом пространстве индекса* k. Мы будем считать, что k принимает значения $1, 2, \ldots, n-1$. Случай $k=n$ исключаем, как приводящий по существу к собственно евклидову пространству (см. начало § 44); в этом случае $A^i_{i'}$ — тоже вещественная ортогональная матрица.

Пусть, как обычно, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ (соответственно $\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{k'}$) — мнимоединичные орты; остальные орты — единичные. Пусть индексы $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ пробегают у нас значения $1, 2, \ldots, k$, а индексы $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ — значения $k+1, \ldots, n$.

Тогда разложение

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{e}_i$$

можно записать в детализированном виде, отличая единичные и мнимоединичные орты:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_{\alpha'} &= A^\alpha_{\alpha'}\mathbf{e}_\alpha + A^\lambda_{\alpha'}\mathbf{e}_\lambda, \\ \mathbf{e}_{\lambda'} &= A^\alpha_{\lambda'}\mathbf{e}_\alpha + A^\lambda_{\lambda'}\mathbf{e}_\lambda. \end{aligned}\right\} \tag{50.1}$$

В правых частях по α и λ происходит, конечно, суммирование. Вся матрица преобразования состоит, таким образом, из четырех матриц:

$$\|A^i_{i'}\| = \begin{array}{c} \quad\overbrace{\qquad}^{k}\ \overbrace{\qquad}^{n-k} \\ \left\|\begin{array}{c:c} A^\alpha_{\alpha'} & A^\lambda_{\alpha'} \\ \hdashline A^\alpha_{\lambda'} & A^\lambda_{\lambda'} \end{array}\right\| \begin{array}{l} \}\,k \\ \}\,n-k \end{array} \end{array}. \tag{50.2}$$

При помощи этой же матрицы преобразуются, как мы знаем, ковариантные координаты x_i произвольного вектора $\mathbf{x}$:

$$\left.\begin{aligned} x_{\alpha'} &= A^\alpha_{\alpha'}x_\alpha + A^\lambda_{\alpha'}x_\lambda, \\ x_{\lambda'} &= A^\alpha_{\lambda'}x_\alpha + A^\lambda_{\lambda'}x_\lambda. \end{aligned}\right\} \tag{50.3}$$

Но его контравариантные координаты x^i преобразуются при помощи транспонированной обратной матрицы, а именно:

$$x^{i'} = A^{i'}_i x^i,$$

или, как мы теперь можем записать:

$$\left.\begin{aligned} x^{\alpha'} &= A^{\alpha'}_{\alpha} x^{\alpha} + A^{\alpha'}_{\lambda} x^{\lambda}, \\ x^{\lambda'} &= A^{\lambda'}_{\alpha} x^{\alpha} + A^{\lambda'}_{\lambda} x^{\lambda}. \end{aligned}\right\} \tag{50.4}$$

Но в любом ортонормированном репере между x^i и x_i существует связь (42.24), которую мы теперь можем записать в виде

$$x_{\alpha} = -x^{\alpha}, \qquad x_{\lambda} = x^{\lambda}. \tag{50.5}$$

Заменяя согласно этим формулам ковариантные координаты через контравариантные в преобразовании (50.3), получим:

$$\left.\begin{aligned} x^{\alpha'} &= A^{\alpha}_{\alpha'} x^{\alpha} - A^{\lambda}_{\alpha'} x^{\lambda}, \\ x^{\lambda'} &= -A^{\alpha}_{\lambda'} x^{\alpha} + A^{\lambda}_{\lambda'} x^{\lambda}. \end{aligned}\right\} \tag{50.6}$$

В правых частях по α и λ по-прежнему подразумевается суммирование. Матрица, посредством которой производится преобразование (50.6), отличается от матрицы (50.2) лишь изменением знака у элементов с разнородными индексами. Но преобразование (50.6) — это лишь другая запись преобразования (50.4), и матрицы у них должны совпадать:

$$\left.\begin{aligned} A^{\alpha'}_{\alpha} &= A^{\alpha}_{\alpha'}, & A^{\alpha'}_{\lambda} &= -A^{\lambda}_{\alpha'}, \\ A^{\lambda'}_{\alpha} &= -A^{\alpha}_{\lambda'}, & A^{\lambda'}_{\lambda} &= A^{\lambda}_{\lambda'}. \end{aligned}\right\} \tag{50.7}$$

Таким образом, *матрица* (50.2) *после изменения знаков элементов в правой верхней и левой нижней клетках совпадает со своей транспонированной обратной матрицей.*

Такие матрицы мы будем называть *псевдоортогональными матрицами* индекса k. Если матрица $A^i_{i'}$ псевдоортогональная, то, конечно, обратная матрица $A^{i'}_i$ тоже псевдоортогональная того же индекса k. Это видно хотя бы из полной симметрии формул (50.7) относительно обеих матриц.

Таким образом, переход от ортов старого к ортам нового репера осуществляется при помощи псевдоортогональной матрицы. Обратно, всякая псевдоортогональная матрица (индекса k) переводит любой данный ортонормированный репер (в пространстве индекса k) снова в ортонормированный репер. Это следует из того, что при наличии условий (50.7) закон преобразования контравариантных координат (50.4) можно переписать в виде (50.6); далее, сравнивая закон преобразования (50.6) с (50.3) и пользуясь соотношениями (50.5), которые имеют место в *данном ортонормированном репере*, убеждаемся, что и *в преобразованном репере* эти соотношения также справедливы:

$$x_{\alpha'} = -x^{\alpha'}, \quad x_{\lambda'} = x^{\lambda'}. \tag{50.8}$$

Сравнивая полученные формулы с общей формулой опускания индекса

$$x_{i'} = g_{i'j'}x^{j'},$$

убеждаемся, что в полученном репере

$$g_{\alpha'\alpha'} = -1, \quad g_{\lambda'\lambda'} = 1, \quad g_{i'j'} = 0 \quad (i' \neq j'),$$

т. е. что репер *ортонормированный.*

Псевдоортогональные матрицы (подобно ортогональным) можно было бы характеризовать условиями, наложенными на попарные произведения их строк, однако теперь произведение двух строк нужно понимать как сумму произведений соответствующих элементов перемножаемых строк, *причем первые k произведений берутся с обратными знаками.* Тогда произведение разных строк всегда давало бы нам нуль, а произведение одинаковых или -1 (для первых k строк) или $+1$ (для остальных).

Разумеется, все сказанное справедливо и для столбцов.

Нетрудно обнаружить, что, как и для ортогональных матриц,

$$\operatorname{Det}|A^{i}_{i'}| = \pm 1. \tag{50.9}$$

В самом деле, изменение знаков в правой верхней и левой нижней клетках матрицы (50.2) не меняет ее определителя, так как сводится к умножению на -1 первых k ее строк и первых k ее столбцов (а определитель умножается при этом на $(-1)^{2k} = 1$). В то же время это изменение знаков означает согласно (50.7)переход к транспонированной обратной матрице, а значит, и определитель меняет свое значение на обратное. Таким образом, $\operatorname{Det}|A^{i}_{i'}|$ равен своей обратной величине, а это влечет равенство (50.9).

Однако в случае псевдоортогональных матриц их классификация по значению определителя ± 1 оказывается слишком грубой. Фактически псевдоортогональные матрицы данного порядка n и данного индекса k распадаются не на два, а на четыре класса (аналогично простейшему случаю псевдоевклидовой плоскости, когда $n = 2$, $k = 1$).

В самом деле, заметим, прежде всего, что в матрице (50.2) левая верхняя и правая нижняя клетки содержат неособенные матрицы (порядков k и $n - k$ соответственно):

$$\operatorname{Det}|A^{\alpha}_{\alpha'}| \neq 0, \quad \operatorname{Det}|A^{\lambda}_{\lambda'}| \neq 0. \tag{50.10}$$

Чтобы показать это, допустим противное, например,

$$\operatorname{Det}|A^{\alpha}_{\alpha'}| = 0.$$

Тогда между строками матрицы $A^{\alpha}_{\alpha'}$ (α' — номер строки) существует линейная зависимость, которую можно написать в виде

$$a^{\alpha'}A^{\alpha}_{\alpha'} = 0 \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ k); \tag{50.11}$$

по α' происходит суммирование. Умножая верхнее равенство (50.1) на $a^{\alpha'}$ и суммируя по $\alpha' = 1',\ \ldots,\ k'$, получаем (учитывая (50.11)):

$$\sum_{\alpha'} a^{\alpha'}\mathbf{e}_{\alpha'} = \sum_{\alpha'} a^{\alpha'}A^{\lambda}_{\alpha'}\mathbf{e}_{\lambda}.$$

Так как коэффициенты линейной зависимости $a^{\alpha'}$ не обращаются в нуль одновременно, то скалярный квадрат левой части равенства будет отрицательным (так как $\mathbf{e}^2_{\alpha'} = -1$, $\mathbf{e}_{\alpha'}\mathbf{e}_{\beta'} = 0$), а скалярный квадрат правой части будет положительным, в крайнем случае нулем (так как $\mathbf{e}^2_{\lambda} = 1$, $\mathbf{e}_{\lambda}\mathbf{e}_{\mu} = 0$). Полученное противоречие показывает справедливость нашего утверждения (50.10). В результате для определителей (50.10) возможны следующие четыре комбинации знаков, соответственно чему распадаются на четыре класса и *движения* ортонормированного репера $\mathfrak{R}$ (как мы будем кратко называть переход от одного ортонормированного репера $\mathfrak{R}$ к другому $\mathfrak{R}'$).

	$\operatorname{Det}\lvert A^{\alpha}_{\alpha'}\rvert$	$\operatorname{Det}\lvert A^{\lambda}_{\lambda'}\rvert$	Тип движения
1°	+	+	Собственное движение
2°	+	—	Несобственное движение 1-го рода
3°	—	+	Несобственное движение 2-го рода
4°	—	—	Несобственное движение 3-го рода

(50.12)

Простейшими примерами движений каждого из четырех типов служат:

1°. Тождественное преобразование.

$$\left.\begin{array}{llll} 2^\circ. & \mathbf{e}_n & \text{переходит в} & -\mathbf{e}_n \\ 3^\circ. & \mathbf{e}_1 & \text{»} \quad \text{»} & -\mathbf{e}_1 \\ 4^\circ. & \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n & \text{»} \quad \text{»} & -\mathbf{e}_1,\ -\mathbf{e}_n \end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\text{остальные орты}\\ \text{и начало } O \text{ не меняются.}\end{array}$$

Так как рассматриваемые определители не могут принимать нулевых значений, то при неизменном $\mathfrak{R}$ и непрерывном изменении $\mathfrak{R}'$ движение всегда остается в пределах одного из указанных четырех типов. Можно было бы показать также (этого мы делать не будем), что в пределах одного типа всегда возможен непрерывный переход от одного движения $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$ к любому другому $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}''$ в смысле *непрерывного* перехода репера $\mathfrak{R}'$ в $\mathfrak{R}''$.

В результате движения каждого типа можно характеризовать тем, что они могут быть получены непрерывным переходом от простейшего движения этого же типа. В частности, собственные движения $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$ характеризуются тем, что их можно получить непрерывным переходом от тождественного преобразования, *т. е.* $\mathfrak{R}'$ *получается непрерывным изменением* $\mathfrak{R}$.

Отсюда вытекает также, что последовательное выполнение двух собственных движений $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}' \to \mathfrak{R}''$ дает снова собственное движение $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}''$. В самом деле, поскольку переход от $\mathfrak{R}$ к $\mathfrak{R}'$ и от $\mathfrak{R}'$ к $\mathfrak{R}''$ происходит в результате непрерывного изменения репера, то тем же свойством обладает и переход от $\mathfrak{R}$ к $\mathfrak{R}''$.

Нетрудно было бы составить таблицу, которая указывала бы, какой тип движения мы получим в результате наложения движений двух данных типов. За образец можно принять простейшие движения каждого из четырех типов; наложение их дает всегда одно из этих же простейших движений. Если перейти теперь от простейших движений к произвольным движениям *этих же типов*, то ввиду непрерывности такого перехода тип результирующего движения не изменится; таблица, составленная для простейших движений, будет пригодна во всех случаях.

Далее, так как при непрерывном изменении движения $\operatorname{Det}|A^i_{i'}|$ (равный ± 1) не меняется, то для любого движения он будет таким же, как и для простейшего движения этого же класса, т. е.

$$\begin{array}{llllll} \operatorname{Det}|A^i_{i'}| = 1 & \text{для} & \text{движений} & \text{классов} & 1^\circ, & 4^\circ; \\ \operatorname{Det}|A^i_{i'}| = -1 & \text{»} & \text{»} & \text{»} & 2^\circ, & 3^\circ. \end{array}$$

Таким образом, наша классификация (50.12) является действительно подразделением более грубой классификации (50.9).

Нетрудно уяснить себе наглядный смысл нашей классификации движений: собственное движение не меняет ориентации не только всего репера в целом, но и отдельно его частей: $\mathbf{e}_\alpha$ (совокупность мнимоединичных ортов) и $\mathbf{e}_\lambda$ (совокупность единичных ортов); несобственное движение 1-го рода не меняет ориентации $\mathbf{e}_\alpha$, но меняет ее для $\mathbf{e}_\lambda$; несобственное движение 2-го рода ведет себя обратным образом; наконец, несобственное движение 3-го рода меняет ориентацию и для $\mathbf{e}_\alpha$, и для $\mathbf{e}_\lambda$, но не меняет ее для репера в целом.

При этом мы говорим, что векторы $\mathbf{e}_{\alpha'}$ и $\mathbf{e}_\alpha$ имеют одинаковую ориентацию тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{Det}|A^\alpha_{\alpha'}| > 0, \tag{50.13}$$

и аналогично для $\mathbf{e}_{\lambda'}$ и $\mathbf{e}_\lambda$.

Чтобы это понятие об одинаковой ориентации векторов $\mathbf{e}_\alpha$ и $\mathbf{e}_{\alpha'}$ (и аналогично $\mathbf{e}_{\lambda'}$, $\mathbf{e}_\lambda$) имело смысл, нужно, конечно, чтобы оно обладало транзитивностью. Другими словами, нужно, чтобы сохранение ориентации $\mathbf{e}_\alpha$ при переходе от первого репера ко второму и от второго к третьему влекло бы за собой сохранение ориентации $\mathbf{e}_\alpha$ и при переходе от первого репера к третьему. Но это можно показать так: ввиду сохранения ориентации $\mathbf{e}_\alpha$ оба перехода будут принадлежать к типам 1°, 2° таблицы (50.12). Наложение двух таких движений дает движение снова типа 1° или 2°, что легко усмотреть, беря для образца простейшие движения типов 1°, 2°. Таким образом, для результирующего движения условие (50.13) снова соблюдается и $\mathbf{e}_\alpha$ для первого и третьего реперов имеют снова одинаковую ориентацию.

Для $\mathbf{e}_\lambda$ проводится совершенно аналогичное рассуждение, но для типов 1°, 3°.

Обращает на себя внимание то, что, оказывается, имеет смысл говорить об одинаковой (или различной) ориентации векторов, например, $\mathbf{e}_\alpha$ и $\mathbf{e}_{\alpha'}$, несмотря на то, что они определяют различные k-мерные плоскости. Но дело в том, что эти плоскости в нашем пространстве — максимально-мерные плоскости со знакоотрицательной метрикой ($\mathbf{x}^2 < 0$), а такие плоскости, как можно было бы показать, нельзя вращать слишком свободно (иначе в них появятся $\mathbf{x}^2 > 0$), в частности, нельзя «перевертывать» и накладывать на себя с обратной ориентацией. Поэтому ориентацию, выбранную на одной из них, можно однозначно перенести, непрерывно вращая эту плоскость, и на все другие такие плоскости, — подобно тому, как это можно сделать (применяя грубое сравнение) для всех плоскостей обычного пространства, наклоненных к данной плоскости под углом не более чем, например, 20°.

Выберем какой-нибудь репер $\mathfrak{R}_0$ и разобьем все реперы пространства на четыре класса в зависимости от того, получаются ли они из $\mathfrak{R}_0$ движениями собственными или несобственными 1-го, 2-го и 3-го рода. Тогда согласно выше сказанному в пределах каждого класса возможен непрерывный переход от одного репера к другому, но непрерывный переход от одного класса к другому невозможен. Очевидно, такое разбиение всех реперов $\mathfrak{R}$ на четыре класса от выбора начального репера $\mathfrak{R}_0$ не зависит (если нумерацией этих классов не интересоваться).

§ 51*. Квазиаффинная и аффинная группы преобразований

В этом и следующем параграфах мы хотим отчетливо выявить некоторые ведущие идеи, лежащие в основе аффинной, евклидовой и вообще всех «однородных» геометрий. В самом деле, однородный в каком-то смысле характер рассмотренных нами до сих пор пространств, их одинаковое строение в разных местах и в разных