Чтобы это понятие об одинаковой ориентации векторов $\mathbf{e}_\alpha$ и $\mathbf{e}_{\alpha'}$ (и аналогично $\mathbf{e}_{\lambda'}$, $\mathbf{e}_\lambda$) имело смысл, нужно, конечно, чтобы оно обладало транзитивностью. Другими словами, нужно, чтобы сохранение ориентации $\mathbf{e}_\alpha$ при переходе от первого репера ко второму и от второго к третьему влекло бы за собой сохранение ориентации $\mathbf{e}_\alpha$ и при переходе от первого репера к третьему. Но это можно показать так: ввиду сохранения ориентации $\mathbf{e}_\alpha$ оба перехода будут принадлежать к типам 1°, 2° таблицы (50.12). Наложение двух таких движений дает движение снова типа 1° или 2°, что легко усмотреть, беря для образца простейшие движения типов 1°, 2°. Таким образом, для результирующего движения условие (50.13) снова соблюдается и $\mathbf{e}_\alpha$ для первого и третьего реперов имеют снова одинаковую ориентацию.

Для $\mathbf{e}_\lambda$ проводится совершенно аналогичное рассуждение, но для типов 1°, 3°.

Обращает на себя внимание то, что, оказывается, имеет смысл говорить об одинаковой (или различной) ориентации векторов, например, $\mathbf{e}_\alpha$ и $\mathbf{e}_{\alpha'}$, несмотря на то, что они определяют различные k-мерные плоскости. Но дело в том, что эти плоскости в нашем пространстве — максимально-мерные плоскости со знакоотрицательной метрикой ($\mathbf{x}^2 < 0$), а такие плоскости, как можно было бы показать, нельзя вращать слишком свободно (иначе в них появятся $\mathbf{x}^2 > 0$), в частности, нельзя «перевертывать» и накладывать на себя с обратной ориентацией. Поэтому ориентацию, выбранную на одной из них, можно однозначно перенести, непрерывно вращая эту плоскость, и на все другие такие плоскости, — подобно тому, как это можно сделать (применяя грубое сравнение) для всех плоскостей обычного пространства, наклоненных к данной плоскости под углом не более чем, например, 20°.

Выберем какой-нибудь репер $\mathfrak{R}_0$ и разобьем все реперы пространства на четыре класса в зависимости от того, получаются ли они из $\mathfrak{R}_0$ движениями собственными или несобственными 1-го, 2-го и 3-го рода. Тогда согласно выше сказанному в пределах каждого класса возможен непрерывный переход от одного репера к другому, но непрерывный переход от одного класса к другому невозможен. Очевидно, такое разбиение всех реперов $\mathfrak{R}$ на четыре класса от выбора начального репера $\mathfrak{R}_0$ не зависит (если нумерацией этих классов не интересоваться).

§ 51*. Квазиаффинная и аффинная группы преобразований

В этом и следующем параграфах мы хотим отчетливо выявить некоторые ведущие идеи, лежащие в основе аффинной, евклидовой и вообще всех «однородных» геометрий. В самом деле, однородный в каком-то смысле характер рассмотренных нами до сих пор пространств, их одинаковое строение в разных местах и в разных направлениях, с наглядной точки зрения представляется очевидным. Этой идее однородности мы придадим точную математическую форму, в этом параграфе для аффинных, а в следующем — для евклидовых пространств. Попутно мы уточним и понятие о преобразованиях репера; с этого мы даже и начнем.

Произвольный репер в n-мерном аффинном пространстве $\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ определяется n^2+n независимыми параметрами в комплексном случае — комплексными, в вещественном — вещественными). Действительно, начало O и каждый из векторов $\mathbf{e}_i$ определяется n координатами. При этом из условия линейной независимости векторов репера следует, что определитель, образованный их координатами, отличен от нуля. В остальном n^2+n параметров совершенно произвольны.

Мы рассматривали до сих пор обычно преобразование одного определенного репера в другой. Сейчас мы станем на более широкую точку зрения и будем применять данное преобразование сразу ко всем ∞^{n^2+n} аффинным реперам, в результате чего каждый из них переходит в некоторый другой. А именно, *применить данное преобразование к многообразию**) *аффинных реперов это значит указать для каждого репера* $\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ *новый репер* $\{O', \mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$, *имеющий заданное расположение относительно старого репера*. Другими словами, для каждого репера $\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ векторы $\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}$ и вектор сдвига $\overrightarrow{OO'}$ разлагаются по $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ *с одними и теми же численными коэффициентами:*

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{e}_i, \quad \overrightarrow{OO'} = A^i\,\mathbf{e}_i. \tag{51.1}$$

Произвольно взятыми численными коэффициентами $A^i_{i'}$, A^i (при условии $\operatorname{Det}|A^i_{i'}| \neq 0$) и характеризуется данное преобразование в многообразии реперов.

Можно также вместо коэффициентов A^i задаваться коэффициентами $A^{i'}$ (как мы делали в § 24), положив

$$\overrightarrow{OO'} = -A^{i'}\mathbf{e}_{i'}.$$

Тогда

$$A^{i'} = -A^{i'}_i A^i \text{ и, обратно, } A^i = -A^i_{i'}A^{i'}. \tag{51.2}$$

Последние соотношения легко получить, пользуясь зависимостью между $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}_{i'}$.

Рассматриваемые нами в многообразии реперов преобразования (51.1) являются, очевидно, взаимно однозначными и *образуют группу*.

---

*) Множество всех аффинных реперов мы будем называть многообразием, намекая на его некоторые геометрические свойства; общая формулировка понятия многообразия будет дана позже.

Последнее означает, что совокупность наших преобразований содержит, во-первых, обратное преобразование для каждого из них и, во-вторых, результирующее преобразование для любых двух из них (а следовательно, и тождественное преобразование). Проверка этих утверждений тривиальна: достаточно убедиться, что при построении обратного и результирующего преобразований мы получаем преобразование того же вида (51.1), причем его коэффициенты $A^i_{i'}$, A^i полностью выражаются через коэффициенты исходных преобразований (и следовательно, вместе с ними имеют одни и те же численные значения для всех реперов).

Преобразования многообразия аффинных реперов в себя (51.1) *мы будем называть квазиаффинными преобразованиями, а группу этих преобразований — квазиаффинной группой.* Квазиаффинная группа в многообразии реперов является *однотранзитивной*, т. е. квазиаффинное преобразование вполне определяется заданием двух произвольно выбранных реперов $\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и $\{O', \mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$, если потребовать, чтобы первый из них при этом переходил во второй. Действительно, коэффициенты $A^i_{i'}$, A^i вполне определятся из разложений (51.1), а тем самым определится и соответствующее квазиаффинное преобразование (путем применения формул (51.1) с теми же численными значениями $A^i_{i'}$, A^i к *каждому* реперу).

Очень важно отчетливо представлять себе, что квазиаффинная группа действует не в аффинном пространстве, а в многообразии его реперов. Более того, ее нельзя даже истолковать как группу, действующую в самом аффинном пространстве. В самом деле, попробуем истолковать квазиаффинное преобразование как точечное преобразование в аффинном пространстве. Для этого рассмотрим всевозможные реперы, имеющие общим началом какую-нибудь точку O, и подвергнем их одновременно *одному и тому же* квазиаффинному преобразованию. Векторы сдвига $\overrightarrow{OO'}$, именно потому, что они будут разлагаться в *разных реперах с одними и теми же* коэффициентами A^i, будут, вообще говоря, различными, и начала наших реперов «расползутся» из общей точки O по разным направлениям. Точка O в результате квазиаффинного преобразования не будет иметь образа.

Квазиаффинное преобразование многообразия реперов можно также рассматривать как преобразование соответствующих аффинных координатных систем; а именно, каждая координатная система преобразуется в другую согласно (24.20):

$$x^{i'} = A^{i'}_i x^i + A^{i'}, \tag{51.3}$$

где $A^{i'}_i, A^{i'}$ имеют фиксированные значения: $A^{i'}_i$ — матрица, обратная $A^i_{i'}$; $A^{i'}$ имеет то же значение, как и в (51.2). Здесь x^i — координаты произвольной точки относительно старого репера, а $x^{i'}$ — координаты той же точки относительно преобразованного репера; коэффициенты преобразования произвольны с единственным ограничением

$$\operatorname{Det}|A_i^{i'}| \neq 0. \tag{51.4}$$

Оставим теперь квазиаффинные преобразования и займемся вопросом «об однородности» аффинного пространства. Прежде всего формулируем понятие об изоморфизме двух n-мерных аффинных пространств.

Мы называем аффинным изоморфизмом двух аффинных пространств такое взаимно однозначное отображение точек одного пространства в точки другого и векторов одного пространства в векторы другого, что: 1) *если точкам A, B первого пространства отвечают точки A^*, B^* второго пространства, то вектору $\overrightarrow{AB}$ отвечает вектор $\overrightarrow{A^*B^*}$;* 2) *если вектору $\mathbf{x}$ первого пространства отвечает вектор $\mathbf{x}^*$ второго пространства, то вектору $\alpha\mathbf{x}$ отвечает вектор $\alpha\mathbf{x}^*$ (где α — любое число, комплексное в случае комплексного пространства и вещественное в случае вещественного пространства).*

В частности, когда рассматриваемые пространства совпадают и речь идет о взаимно однозначном отображении точек и векторов аффинного пространства в точки и векторы того же пространства (с соблюдением прежних требований), то изоморфизм мы будем называть *автоморфизмом* или *аффинным преобразованием* аффинного пространства в себя.

Наше определение изоморфизма подобрано так, что, переходя от точек и векторов первого пространства к точкам и векторам второго пространства, мы не нарушаем никаких их аффинных свойств и соотношений; эти взаимоотношения в точности повторяются и после перехода. Действительно, если внимательно просмотреть нашу аксиоматику аффинного пространства, то нетрудно заметить, что в ней фигурируют по существу лишь два основных взаимоотношения между точками и векторами: что данный вектор $\mathbf{x}$ определяется парой данных точек A, B ($\mathbf{x} = \overrightarrow{AB}$) и что данный вектор $\mathbf{y}$ есть вектор $\mathbf{x}$, умноженный на число α ($\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$). В остальном аксиомы говорят о свойствах этих взаимоотношений, но каких-либо иных взаимоотношений не устанавливают.

Из определения изоморфизма легко получается, в частности, что вектор-нуль отображается в вектор-нуль, сумма векторов отображается в сумму отображенных векторов и т. д. Линейная зависимость между векторами, как следует отсюда, переходит в линейную зависимость с теми же коэффициентами. Поэтому размерность n, т. е. максимальное возможное число линейно независимых векторов, будет в изоморфных пространствах обязательно одинаковой.

Выберем в первом аффинном пространстве какой-либо репер $\mathfrak{R}_0\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. В силу изоморфизма ему отвечает во втором пространстве некоторый репер $\mathfrak{R}_0^*\{O^*, \mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_n^*\}$. Каждому вектору

$$\mathbf{x} = x^\alpha \mathbf{e}_\alpha \tag{51.5}$$

отвечает вектор

$$\mathbf{x}^* = x^\alpha \mathbf{e}_\alpha^* \tag{51.6}$$

с теми же координатами x^α в силу сохранения линейных зависимостей при изоморфизме.

В частности, радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ каждой точки M переходит в радиус-вектор $\overrightarrow{O^*M^*}$ преобразованной точки M^*, сохраняя прежние координаты x^α. Тем самым и точка M^* имеет в преобразованном репере прежние координаты.

Итак, *всякий данный изоморфизм двух аффинных пространств можно описать следующим образом. В первом пространстве задаемся произвольным репером* $\mathfrak{R}_0(O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ *а во втором пространстве берем соответствующий ему репер* $\mathfrak{R}_0^*(O^*, \mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_n^*)$. *Каждой точке* M (*вектору* $\mathbf{x}$) *в первом пространстве ставим в соответствие точку* M^* (*вектор* $\mathbf{x}^*$) *во втором пространстве так, чтобы координаты* M^* (*вектора* $\mathbf{x}^*$) *относительно второго репера были такими же, как и координаты* M (*вектора* $\mathbf{x}$) *относительно первого репера.*

Обратно, задавшись реперами $\mathfrak{R}_0$, $\mathfrak{R}_0^*$ произвольно, мы при помощи указанного построения всегда получаем изоморфизм, что обнаруживается тривиальной проверкой. Этот изоморфизм переводит $\mathfrak{R}_0$ в $\mathfrak{R}_0^*$ и определяется, очевидно, однозначным образом.

Все сказанное справедливо и для частного случая, когда оба пространства совпадают, и речь идет об *автоморфизме*—аффинном преобразовании пространства в себя.

Оба репера $\mathfrak{R}_0$ и $\mathfrak{R}_0^*$ берутся тогда в одном и том же аффинном пространстве, и каждая его точка M переводится в некоторую точку M^* с таким расчетом, чтобы M^* относительно $\mathfrak{R}_0^*$ имела те же координаты x^i, что и точка M относительно $\mathfrak{R}_0$. Пусть $x^{i'}$ суть координаты точки M^* относительно репера $\mathfrak{R}_0$, и, следовательно, связаны с x^i формулами (51.3)

$$x^{i'} = A_i^{i'} x^i + A^{i'}. \tag{51.7}$$

Но так как x^i—координаты произвольной точки M относительно репера $\mathfrak{R}_0$, $x^{i'}$—координаты преобразованной точки M^* относительно того же репера $\mathfrak{R}_0$, то теперь формулы (51.7) дают *аффинное* *преобразование пространства в себя,* т. е. выражают координаты преобразованной точки как функции координат произвольно взятой исходной точки *в неизменной координатной системе.*

Очевидно, далее, что аффинные преобразования в данном аффинном пространстве образуют *группу.* В самом деле, из определения автоморфизма немедленно следует, что обратное к автоморфизму преобразование есть тоже автоморфизм и наложение двух автоморфизмов есть снова автоморфизм. Группу аффинных автоморфизмов мы будем называть *аффинной группой. Наличие этой группы и есть точное выражение идеи однородности аффинного пространства.*

В отличие от квазиаффинных преобразований аффинные преобразования по самому определению суть *точечные* преобразования пространства (соответствующие преобразования векторов можно при желании считать следствием точечных преобразований). Вместе с тем аффинное преобразование переводит *каждый* репер пространства снова в репер, так что мы получаем взаимно однозначное преобразование многообразия реперов в себя. Группа аффинных преобразований, рассматриваемых в многообразии реперов, является согласно сказанному выше *однотранзитивной.*

Понятие группы автоморфизмов аффинного пространства введено нами лишь на заключительном этапе его теории. Однако это не значит, что речь идет о маловажном понятии; напротив, эта группа играет огромную принципиальную роль. С ее точки зрения необходимо переосмыслить некоторые наши прежние понятия. Так, мы рассматривали до сих пор аффинные реперы как специального вида конструкции, оказавшиеся нам полезными. Теперь мы можем формулировать идею, лежащую в основе этого понятия. Пусть нам дана совокупность фигур $\mathfrak{R}$, обладающая следующим свойством: *любую фигуру $\mathfrak{R}_1$ этой совокупности можно перевести в любую фигуру $\mathfrak{R}_2$ этой же совокупности одним и только одним автоморфизмом данного пространства и любой автоморфизм пространства переводит каждую фигуру $\mathfrak{R}_1$ нашей совокупности в некоторую фигуру $\mathfrak{R}_2$ этой же совокупности. Тогда фигуры $\mathfrak{R}$ называются реперами данного пространства.*

Это определение раскрывает настоящий смысл наших аффинных реперов, но применимо не только к ним. Так же определяются реперы и в любом однородном пространстве, т. е. в пространстве, геометрические свойства которого могут быть определены как инварианты некоторой транзитивной группы взаимно однозначных преобразований этого пространства в себя (которая и будет группой его автоморфизмов).

Заметим, что из нашего определения репера не вытекает его конкретный вид, например, что аффинный репер будет именно состоять из точки и n линейно независимых векторов; здесь остается произвол, который используется в целях наибольшей простоты и удобства.

Интересно сравнить теперь группу *аффинных* и группу *квазиаффинных* преобразований в n^2+n-мерном многообразии всевозможных реперов n-мерного аффинного пространства.

Обе группы однотранзитивны, т. е. для любых двух реперов $\mathfrak{R}_0$, $\mathfrak{R}_0^*$ как в одной, так и в другой группе найдется точно одно преобразование, переводящее $\mathfrak{R}_0$ в $\mathfrak{R}_0^*$. Но характер этих преобразований существенно различный. В случае *аффинного* преобразования мы *изоморфно* отображаем аффинное пространство в себя, точки переходят в точки, векторы в векторы с сохранением всех их аффинных взаимоотношений; в частности, и реперы переходят в реперы (причем $\mathfrak{R}_0$ переходит в $\mathfrak{R}_0^*$).

В случае квазиаффинного преобразования о преобразовании точек и векторов нет смысла говорить; каждый же репер $\mathfrak{R}$ переходит в новое положение $\mathfrak{R}^*$ так, что $\mathfrak{R}^*$ относительно $\mathfrak{R}$ расположен точно так же, как $\mathfrak{R}_0^*$ относительно $\mathfrak{R}_0$. Мы уточняли это в том смысле, что векторы репера $\mathfrak{R}^*$ и смещение его начала сравнительно с началом $\mathfrak{R}$ разлагаются по векторам репера $\mathfrak{R}$ с теми же коэффициентами, как и в случае реперов $\mathfrak{R}_0^*$, $\mathfrak{R}_0$.

Но это равносильно тому, что, переводя аффинным преобразованием $\mathfrak{R}_0$ в $\mathfrak{R}$, мы заставим перейти и $\mathfrak{R}_0^*$ в $\mathfrak{R}^*$. Таким образом, геометрический смысл того утверждения, что *репер $\mathfrak{R}_0^*$ относительно $\mathfrak{R}_0$ и $\mathfrak{R}^*$ относительно $\mathfrak{R}$ расположены одинаково, заключается в возможности перевести пару реперов $\mathfrak{R}_0$, $\mathfrak{R}_0^*$ в пару реперов $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}^*$ некоторым автоморфизмом нашего пространства.* Это определение пригодно не только в аффинном, но и в любом однородном пространстве.

Мы можем теперь формулировать следующее правило, исчерпывающее связь между *аффинными и квазиаффинными* преобразованиями в многообразии реперов.

Если четыре репера подобраны так, что

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{R}_0 \to \mathfrak{R}_0^*,\\ \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}^*\end{array}\right\} \tag{51.8}$$

при одном и том же квазиаффинном преобразовании, то

$$\left.\begin{array}{cc}\mathfrak{R}_0, & \mathfrak{R}_0^*,\\ \downarrow & \downarrow\\ \mathfrak{R} & \mathfrak{R}^*\end{array}\right\} \tag{51.9}$$

при одном и том же аффинном преобразовании (и обратно).

Эту зависимость между аффинными и квазиаффинными преобразованиями в многообразии реперов можно формулировать в виде *перестановочности любого аффинного преобразования с любым квазиаффинным преобразованием.* Действительно, из (51.8), (51.9) видно, что при выполнении данного аффинного и данного квазиаффинного преобразований, *в том или другом порядке безразлично,* репер $\mathfrak{R}_0$ все равно перейдет в репер $\mathfrak{R}^*$. Обратно, из перестановочности данных преобразований следует наше правило.

Две однотранзитивные взаимно перестановочные группы преобразований в многообразии аффинных реперов представляют собой пример конструкции, играющей важную роль в геометрии и в теории групп Ли.

А именно, если в каком-либо многообразии дана однотранзитивная группа взаимно однозначных преобразований этого многообразия в себя, то единственным образом определяется вторая однотранзитивная группа, преобразования которой будут перестановочны со всеми преобразованиями первой. В самом деле, задавшись как-либо элементами многообразия A_0, A_0^*, мы передвигаем эту пару элементов всевозможными преобразованиями первой группы в положения A, A^*; в силу однотранзитивности первой группы A пробегает все многообразие, причем каждому положению A отвечает строго определенное положение A^*. Преобразование $A \to A^*$ будет перестановочным со всеми преобразованиями первой группы и, как мы видим, однозначно определяется выбором $A_0 \to A_0^*$. Совокупность таких преобразований и образует вторую, тоже однотранзитивную группу. Обе группы играют взаимно симметрическую роль.

В случае многообразия аффинных реперов все же естественно считать основной аффинную группу (группу автоморфизмов), а квазиаффинную группу — построенной дополнительно по принципу перестановочности с группой автоморфизмов.

§ 52*. Группа квазидвижений и группа движений в евклидовом пространстве

Мы проведем сейчас в евклидовом пространстве те построения, которые были выполнены в предыдущем параграфе для аффинного пространства. При этом под евклидовым пространством можно понимать как комплексное евклидово пространство, так и любое из вещественных евклидовых пространств; по внешности наши рассуждения зависеть от этого не будут. Вместо аффинных реперов соответствующую роль будут играть теперь ортонормированные реперы.

Мы подробно рассматривали в свое время переход от одного ортонормированного репера к другому; согласно (51.1) его можно