Эту зависимость между аффинными и квазиаффинными преобразованиями в многообразии реперов можно формулировать в виде *перестановочности любого аффинного преобразования с любым квазиаффинным преобразованием.* Действительно, из (51.8), (51.9) видно, что при выполнении данного аффинного и данного квазиаффинного преобразований, *в том или другом порядке безразлично,* репер $\mathfrak{R}_0$ все равно перейдет в репер $\mathfrak{R}^*$. Обратно, из перестановочности данных преобразований следует наше правило.

Две однотранзитивные взаимно перестановочные группы преобразований в многообразии аффинных реперов представляют собой пример конструкции, играющей важную роль в геометрии и в теории групп Ли.

А именно, если в каком-либо многообразии дана однотранзитивная группа взаимно однозначных преобразований этого многообразия в себя, то единственным образом определяется вторая однотранзитивная группа, преобразования которой будут перестановочны со всеми преобразованиями первой. В самом деле, задавшись как-либо элементами многообразия A_0, A_0^*, мы передвигаем эту пару элементов всевозможными преобразованиями первой группы в положения A, A^*; в силу однотранзитивности первой группы A пробегает все многообразие, причем каждому положению A отвечает строго определенное положение A^*. Преобразование $A \to A^*$ будет перестановочным со всеми преобразованиями первой группы и, как мы видим, однозначно определяется выбором $A_0 \to A_0^*$. Совокупность таких преобразований и образует вторую, тоже однотранзитивную группу. Обе группы играют взаимно симметрическую роль.

В случае многообразия аффинных реперов все же естественно считать основной аффинную группу (группу автоморфизмов), а квазиаффинную группу — построенной дополнительно по принципу перестановочности с группой автоморфизмов.

§ 52*. Группа квазидвижений и группа движений в евклидовом пространстве

Мы проведем сейчас в евклидовом пространстве те построения, которые были выполнены в предыдущем параграфе для аффинного пространства. При этом под евклидовым пространством можно понимать как комплексное евклидово пространство, так и любое из вещественных евклидовых пространств; по внешности наши рассуждения зависеть от этого не будут. Вместо аффинных реперов соответствующую роль будут играть теперь ортонормированные реперы.

Мы подробно рассматривали в свое время переход от одного ортонормированного репера к другому; согласно (51.1) его можно записать в виде

$$\mathbf{e}_{i'} = A_{i'}^{i}\mathbf{e}_{i}, \quad \overrightarrow{OO^*} = A^{i}\,\mathbf{e}_{i}, \tag{52.1}$$

так как ортонормированные реперы — частный случай аффинных. Только теперь матрица $A_{i'}^{i}$ — уже не произвольная неособенная матрица, а обязательно или комплексная ортогональная, или вещественная ортогональная, или вещественная псевдоортогональная — в зависимости от характера рассматриваемого евклидова пространства.

Рассмотрим многообразие всех ортонормированных реперов нашего пространства. Если вспомнить построение ортонормированного репера, то нетрудно подсчитать, что это многообразие будет $\frac{n(n+1)}{2}$-мерным. Действительно, произвольный выбор начала O в n-мерном пространстве дает n независимых параметров, произвольный выбор единичного (или мнимоединичного) вектора $\mathbf{e}_1$ дает $n-1$ параметров (один параметр снимается за счет нормировки), далее $\mathbf{e}_2$ выбирается уже в $n-1$-мерной плоскости R_{n-1} и зависит поэтому от $n-2$ параметров и т. д. В итоге число параметров равно:

$$n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Разумеется, в случае комплексного пространства эти параметры будут комплексными *).

Задавшись матрицей $A_{i'}^{i}$ и коэффициентами A^{i}, мы будем производить преобразование (52.1) над *каждым* ортонормированным репером нашего евклидова пространства. Мы получаем взаимно однозначное преобразование многообразия реперов в себя, которое будем называть *квазидвижением* в многообразии реперов. Таким образом, наглядный смысл квазидвижения состоит в том, что каждый репер переходит в новый репер, расположенный относительно его вполне определенным образом. Действительно, так как мы задались определенными численными значениями $A_{i'}^{i}$ и A^{i}, то в аффинном смысле новый репер будет расположен всегда одним и тем же способом относительно старого (§ 51); то так как, кроме того, старый репер ортонормированный и обладает строго определенными метрическими свойствами, то постоянство коэффициентов означает, что и в метрическом смысле расположение нового репера относительно старого будет всегда одним и тем же.

---

*) Строго говоря, наш подсчет является лишь грубо ориентировочным: мы как бы упускаем из виду, что на самом деле многообразие *всех* ортонормированных реперов не является элементарным (§ 80) и не может быть обслужено *одной* системой $\frac{1}{2}n(n+1)$ параметров (одной координатной системой).

Так, на обычной плоскости квазидвижение можно определить, например, тем, что каждый ортонормированный репер $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ сдвигается на три единицы длины в направлении вектора $\mathbf{e}_1$ и поворачивается затем около O на $60°$ в направлении от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$.

Квазидвижение в многообразии реперов сопровождается преобразованием соответствующих им координатных систем по формуле (частный случай (51.3))

$$x^{i'} = A_i^{i'} x^i + A^{i'}. \tag{52.2}$$

Как и квазиаффинные преобразования, квазидвижения суть преобразования в многообразии реперов и не могут быть истолкованы как точечные преобразования евклидова пространства.

Переходим теперь к изучению изоморфных соответствий (изоморфизмов) между евклидовыми пространствами. *Изоморфизмом между двумя евклидовыми пространствами мы будем называть аффинный изоморфизм между ними* (§ 51) *с добавочным требованием сохранения скалярного произведения*, т. е. мы требуем дополнительно, чтобы для любых двух векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ первого пространства и соответствующих им векторов $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ второго пространства имело место равенство

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{x}^*\mathbf{y}^*. \tag{52.3}$$

Так как евклидово пространство мы определили как аффинное пространство с фиксированной в нем билинейной скалярной функцией двух векторов — скалярным произведением, то ясно, что изоморфизм переводит образы первого пространства в образы второго пространства с сохранением их аффинных и метрических свойств.

Изоморфное отображение евклидова пространства на себя мы будем называть *автоморфизмом или движением в евклидовом пространстве*. Всякий изоморфизм, в частности, автоморфизм переводит ортонормированный репер, очевидно, снова в ортонормированный репер, причем соответствующие точки будут иметь в этих реперах одинаковые координаты (§ 51).

Обратно, зададимся произвольными ортонормированными реперами $\mathfrak{R}_0$ и $\mathfrak{R}_0^*$ или в разных евклидовых пространствах (но тогда обязательно одинакового числа измерений n и, в вещественном случае, одинакового индекса k), или в одном и том же евклидовом пространстве, и каждую точку M (вектор $\mathbf{x}$) с координатами x^i относительно репера $\mathfrak{R}_0$ отобразим в точку M^* (вектор $\mathbf{x}^*$) с теми же координатами x^i относительно репера $\mathfrak{R}_0^*$. Тривиальная проверка показывает, что при этом сохраняются аффинные свойства, и мы имеем, таким образом, аффинный изоморфизм; кроме того, сохраняется и скалярное произведение, так как в ортонормированном репере данного индекса k оно всегда одинаково выражается через координаты векторов $\mathbf{x}\mathbf{y} = -x^1y^1 - \ldots - x^ky^k + x^{k+1}y^{k+1} + \ldots + x^ny^n$;

координаты же векторов x, y остаются в результате нашего преобразования неизменными, если их оценивать в преобразованном репере.

В частности, движения в данном евклидовом пространстве, согласно сказанному, однозначно определяются произвольным выбором ортонормированных реперов $\mathfrak{R}_0$ и $\mathfrak{R}_0^*$ и требованием, чтобы репер $\mathfrak{R}_0$ переходил в репер $\mathfrak{R}_0^*$. Мы видим, что ортонормированные реперы в евклидовом пространстве рассматриваются нами не случайно: они играют такую же роль, как аффинные реперы в аффинном пространстве. А именно, в обоих случаях каждой паре реперов отвечает один и только один автоморфизм пространства, переводящий первый репер во второй; и каждый репер любым автоморфизмом переводится снова в некоторый репер; это и есть то основное, что заключено в идее репера (см. § 51).

Совершенно аналогично § 51 мы можем истолковать одинаковое расположение ортонормированных реперов $\mathfrak{R}^*$ относительно $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}_0^*$ относительно $\mathfrak{R}_0$ как возможность перевести пару реперов $\mathfrak{R}_0$, $\mathfrak{R}_0^*$ в пару реперов $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}^*$ некоторым движением евклидова пространства, т. е. снова получаем схему (51.8)—(51.9). Дословно повторяются и последующие рассуждения, так что для движений и квазидвижений в многообразии ортонормированных реперов справедливо все сказанное относительно аффинных и квазиаффинных преобразований в многообразии аффинных реперов. В частности, идея *однородности* евклидова пространства находит себе точное выражение в существовании *группы движений*.

Классификация движений ортонормированных реперов, т. е. переходов $\mathfrak{R}_0 \to \mathfrak{R}_0^*$ (§§ 49, 50), полностью переносится и на вызываемые этими переходами движения всего евклидова пространства:

1) собственные движения и несобственные движения,

$$\operatorname{Det} |A_{i'}^{i}| = \pm 1, \tag{52.4}$$

в случае комплексных евклидовых или собственно евклидовых пространств;

2) собственные движения и несобственные движения 1-го, 2-го, 3-го рода:

	$\operatorname{Det} \lvert A_{\alpha'}^{\alpha} \rvert$	$\operatorname{Det} \lvert A_{\lambda'}^{\lambda} \rvert$
1°	+	+
2°	+	—
3°	—	+
4°	—	—

(52.5)

в случае псевдоевклидовых пространств.

Правда, может возникнуть следующее сомнение. Одно и то же движение в евклидовом пространстве можно задать как парой реперов $\mathfrak{R}_0 \to \mathfrak{R}_0^*$, так и парой реперов $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}^*$, где репер $\mathfrak{R}$ выбран произвольно, а $\mathfrak{R}^*$ ему соответствует в результате движения. Нужно показать, что при данном движении переход от $\mathfrak{R}_0$ к $\mathfrak{R}_0^*$ и от $\mathfrak{R}$ к $\mathfrak{R}^*$ будет принадлежать всегда к одному и тому же типу, который тем самым естественно принять и за тип движения.

Если мы непрерывно меняем репер $\mathfrak{R}$, причем, конечно, непрерывно меняется и соответствующий репер $\mathfrak{R}^*$, то тип перехода $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}^*$ не может измениться, так как определители (52.4), (52.5), не принимая нулевых значений, не могут менять и знаков. Но непрерывным изменением репера $\mathfrak{R}$ мы можем получить, как нам известно, любой репер того же класса. (Мы имеем в виду, что все реперы в комплексном евклидовом и собственно евклидовом пространстве распадаются на два класса, а в псевдоевклидовом пространстве — на четыре класса; см. §§ 49, 50.) Таким образом, тип перехода $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}^*$ будет одним и тем же, если реперы $\mathfrak{R}$ берутся из одного класса.

Но это же самое будет верным и при любом выборе репера $\mathfrak{R}$. В самом деле, заменим и в репере $\mathfrak{R}$, и в репере $\mathfrak{R}^*$ вектор $\mathbf{e}_1$ на $-\mathbf{e}_1$. Полученные в результате реперы $\tilde{\mathfrak{R}}$, $\tilde{\mathfrak{R}}^*$, очевидно, по-прежнему соответствуют друг другу при том же движении: $\tilde{\mathfrak{R}} \to \tilde{\mathfrak{R}}^*$, причем тип перехода останется прежним. Действительно, в силу замены $\mathbf{e}_1 \to -\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_{1'} \to -\mathbf{e}_{1'}$ в матрицах $\|A_{i'}^i\|$, $\|A_{\alpha'}^{\alpha}\|$ умножаются на -1 первая строка и первый столбец, т. е. соответствующие определители не изменятся; матрица же $\|A_{\lambda'}^{\lambda}\|$ вообще не изменится.

Итак, тип перехода $\tilde{\mathfrak{R}} \to \tilde{\mathfrak{R}}^*$ останется без изменения, хотя репер $\tilde{\mathfrak{R}}$ принадлежит к другому классу, чем репер $\mathfrak{R}$. В случае комплексного евклидова и собственно евклидова пространств вопрос этим исчерпывается ввиду наличия лишь двух классов реперов. В случае псевдоевклидова пространства имеется четыре класса реперов, и нужно провести совершенно аналогичное рассуждение, во-первых, с заменой $\mathbf{e}_n$ на $-\mathbf{e}_n$ и, во-вторых, с заменой $\mathbf{e}_n$ на $-\mathbf{e}_n$ и $\mathbf{e}_1$ на $-\mathbf{e}_1$ одновременно. В результате мы убеждаемся, что данное движение в евклидовом пространстве, примененное к любому реперу, дает переход всегда одного и того же типа. Поэтому тип этого перехода законно принять за тип самого движения.

§ 53*. Вложение вещественных евклидовых пространств в комплексное евклидово пространство

Далеко идущая аналогия в свойствах комплексного и вещественного пространств, ранее аффинных, а теперь евклидовых, не должна, однако, вводить нас в заблуждение. Комплексное n-мерное аффинное пространство (мы начнем с него) обладает весьма своеобразной