Правда, может возникнуть следующее сомнение. Одно и то же движение в евклидовом пространстве можно задать как парой реперов $\mathfrak{R}_0 \to \mathfrak{R}_0^*$, так и парой реперов $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}^*$, где репер $\mathfrak{R}$ выбран произвольно, а $\mathfrak{R}^*$ ему соответствует в результате движения. Нужно показать, что при данном движении переход от $\mathfrak{R}_0$ к $\mathfrak{R}_0^*$ и от $\mathfrak{R}$ к $\mathfrak{R}^*$ будет принадлежать всегда к одному и тому же типу, который тем самым естественно принять и за тип движения.

Если мы непрерывно меняем репер $\mathfrak{R}$, причем, конечно, непрерывно меняется и соответствующий репер $\mathfrak{R}^*$, то тип перехода $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}^*$ не может измениться, так как определители (52.4), (52.5), не принимая нулевых значений, не могут менять и знаков. Но непрерывным изменением репера $\mathfrak{R}$ мы можем получить, как нам известно, любой репер того же класса. (Мы имеем в виду, что все реперы в комплексном евклидовом и собственно евклидовом пространстве распадаются на два класса, а в псевдоевклидовом пространстве — на четыре класса; см. §§ 49, 50.) Таким образом, тип перехода $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}^*$ будет одним и тем же, если реперы $\mathfrak{R}$ берутся из одного класса.

Но это же самое будет верным и при любом выборе репера $\mathfrak{R}$. В самом деле, заменим и в репере $\mathfrak{R}$, и в репере $\mathfrak{R}^*$ вектор $\mathbf{e}_1$ на $-\mathbf{e}_1$. Полученные в результате реперы $\tilde{\mathfrak{R}}$, $\tilde{\mathfrak{R}}^*$, очевидно, по-прежнему соответствуют друг другу при том же движении: $\tilde{\mathfrak{R}} \to \tilde{\mathfrak{R}}^*$, причем тип перехода останется прежним. Действительно, в силу замены $\mathbf{e}_1 \to -\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_{1'} \to -\mathbf{e}_{1'}$ в матрицах $\|A_{i'}^i\|$, $\|A_{\alpha'}^{\alpha}\|$ умножаются на -1 первая строка и первый столбец, т. е. соответствующие определители не изменятся; матрица же $\|A_{\lambda'}^{\lambda}\|$ вообще не изменится.

Итак, тип перехода $\tilde{\mathfrak{R}} \to \tilde{\mathfrak{R}}^*$ останется без изменения, хотя репер $\tilde{\mathfrak{R}}$ принадлежит к другому классу, чем репер $\mathfrak{R}$. В случае комплексного евклидова и собственно евклидова пространств вопрос этим исчерпывается ввиду наличия лишь двух классов реперов. В случае псевдоевклидова пространства имеется четыре класса реперов, и нужно провести совершенно аналогичное рассуждение, во-первых, с заменой $\mathbf{e}_n$ на $-\mathbf{e}_n$ и, во-вторых, с заменой $\mathbf{e}_n$ на $-\mathbf{e}_n$ и $\mathbf{e}_1$ на $-\mathbf{e}_1$ одновременно. В результате мы убеждаемся, что данное движение в евклидовом пространстве, примененное к любому реперу, дает переход всегда одного и того же типа. Поэтому тип этого перехода законно принять за тип самого движения.

§ 53*. Вложение вещественных евклидовых пространств в комплексное евклидово пространство

Далеко идущая аналогия в свойствах комплексного и вещественного пространств, ранее аффинных, а теперь евклидовых, не должна, однако, вводить нас в заблуждение. Комплексное n-мерное аффинное пространство (мы начнем с него) обладает весьма своеобразной геометрией. Начать с того, что по существу это пространство обладает не n, а $2n$ измерениями. В самом деле, каждая из n комплексных координат x^p, определяющих положение точки, как и всякое комплексное число, может быть записана в виде

$$x^p = \alpha^p + i\beta^p,$$

а следовательно, положение точки определяется $2n$ независимыми вещественными параметрами, и фактически мы имеем $2n$-мерное пространство. Может показаться, что комплексное n-мерное аффинное пространство просто эквивалентно $2n$-мерному вещественному аффинному пространству, но это тоже было бы неверно.

Так, например, m-мерные плоскости в комплексном аффинном пространстве будут действительно $2m$-мерными плоскостями в вещественном $2n$-мерном пространстве с координатами α^i, β^i, но, однако, отнюдь *не любыми* такими плоскостями. В частности, прямые линии в комплексном пространстве ($m = 1$) будут по существу двумерными плоскостями в вещественном $2n$-мерном пространстве, но также не произвольными, а принадлежащими к некоторому определенному классу.

Аффинные преобразования в комплексном n-мерном аффинном пространстве зависят от $n^2 + n$ комплексных параметров, т. е. от $2(n^2 + n)$ вещественных параметров.

Между тем аффинные преобразования в соответствующем $2n$-мерном вещественном аффинном пространстве зависят от

$$(2n)^2 + 2n = 4n^2 + 2n$$

вещественных параметров и образуют более обширную группу.

Все это показывает, что формальное сходство между комплексным и вещественным аффинными пространствами не затрагивает самую геометрическую основу этих пространств. Это сказалось, между прочим, в § 37 при рассмотрении объемов в аффинном пространстве, где мы сознательно ограничились вещественным случаем. Если бы захотели рассматривать объемы в комплексном пространстве, то нам не удалось бы удержаться в рамках формальной аналогии с вещественным пространством и пришлось бы прямо трактовать n-мерное комплексное пространство как $2n$-мерное вещественное.

Все, что было сказано, остается справедливым и при переходе к евклидовым пространствам. Особенно следует подчеркнуть, что пара точек в вещественном евклидовом пространстве обладает *одним* вещественным инвариантом (расстоянием), в то время как в комплексном евклидовом пространстве таких инвариантов *два*, так как *комплексное расстояние* равносильно двум вещественным инвариантам. С этим связано и то, что группа движений в n-мерном комплексном евклидовом пространстве зависит от существенно меньшего числа параметров, чем в $2n$-мерном вещественном евклидовом пространстве (в первом случае $\frac{n(n+1)}{2}$ комплексных, а значит, $n(n+1)$ вещественных параметров, во втором случае $\frac{2n(2n+1)}{2}=n(2n+1)$ вещественных параметров).

Мы хотим теперь показать, что n-мерное вещественное евклидово пространство всегда можно «вложить» в n-мерное комплексное евклидово пространство, т. е. рассматривать как подпространство последнего.

Покажем это сначала для собственно евклидова пространства. *Выберем какой-либо ортонормированный репер* $\Re\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ *в комплексном евклидовом пространстве и рассмотрим совокупность всех точек M и векторов $\mathbf{x}$ этого пространства, координаты которых x^i имеют вещественные значения.* Мы утверждаем, что эта совокупность точек и векторов образует n-мерное собственно евклидово пространство. В самом деле, прежде всего мы получаем таким образом n-мерное вещественное аффинное пространство, так как все соответствующие аксиомы будут у нас соблюдаться. Так, например, вектор $\overrightarrow{AB}$, «соединяющий» точки A, B с вещественными координатами, сам имеет вещественные координаты; откладывание вектора $\mathbf{x}$ с вещественными координатами от точки A с вещественными координатами приводит нас в точку B тоже с вещественными координатами; умножение вектора $\mathbf{x}$ с вещественными координатами на вещественное число α дает нам вектор $\alpha\mathbf{x}$, снова обладающий этим свойством, и т. д. Размерность полученного *вещественного* аффинного пространства будет равна n, так как n линейно независимых векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ существует, а любой вектор $\mathbf{x}$ с вещественными координатами тем самым разлагается по ним с вещественными коэффициентами. Но, кроме того, в полученном пространстве имеется и метрика (заимствованная из вмещающего комплексного евклидова пространства)

$$\mathbf{x}^2 = x^{1^2} + x^{2^2} + \ldots + x^{n^2}.$$

Так как мы ограничиваемся векторами $\mathbf{x}$ с вещественными координатами $x^1, x^2, \ldots, x^n$, то это есть метрика собственно евклидова пространства.

Следует обратить внимание на то, что выделенное таким образом в n-мерном комплексном евклидовом пространстве n-мерное собственно евклидово пространство *не образует в нем плоскости*, по крайней мере, в том смысле, как мы употребляем этот термин. В самом деле, плоскость строится у нас на основе каких-то $m < n$ линейно независимых направляющих векторов, из которых составляются всевозможные линейные комбинации с *комплексными* коэффициентами (поскольку пространство комплексное); полученные векторы откладываются от фиксированной точки O^*. Мы же вместо этого взяли все n ортов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, но, составляя их линейные комбинации, искусственно ограничились лишь вещественными коэффициентами.

Почти столь же просто можно выделить в n-мерном комплексном евклидовом пространстве и псевдоевклидово пространство, тоже n-мерное и обладающее любым индексом $k = 0, 1, \ldots, n$. Для этого достаточно взять за основу вместо какого-нибудь ортонормированного репера $\mathfrak{R}\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ репер

$$\tilde{\mathfrak{R}}\{O, i\mathbf{e}_1, \ldots, i\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}, \tag{53.1}$$

т. е. помножить первые k векторов на i (это вполне возможно, так как мы находимся в комплексном пространстве). Нетрудно заметить, что тем самым эти векторы из единичных превратятся в мнимоединичные.

Рассмотрим теперь совокупность точек и векторов, имеющих вещественные координаты x^i относительно репера $\tilde{\mathfrak{R}}$. Совершенно так же, как и ранее, убеждаемся, что мы получили вещественное n-мерное аффинное пространство. Кроме того, это пространство снабжено метрикой

$$\mathbf{x}^2 = -x^{1^2} - \ldots - x^{k^2} + x^{k+1^2} + \ldots + x^{n^2}, \tag{53.2}$$

так как вектор $\mathbf{x}$ с вещественными координатами x^i относительно репера $\tilde{\mathfrak{R}}$ имеет разложение

$$\mathbf{x} = ix^1\mathbf{e}_1 + \ldots + ix^k\mathbf{e}_k + x^{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + \ldots + x^n\mathbf{e}_n, \tag{53.3}$$

откуда легко получается (53.2) почленным возведением в скалярный квадрат. Мы действительно выделили псевдоевклидово пространство индекса k.

В ряде случаев бывает полезным трактовать этим путем вещественные евклидовы пространства как подпространства комплексного евклидова пространства того же (в комплексном смысле!) числа измерений n. Конечно, такое выделение вещественных евклидовых пространств совершается бесчисленным количеством способов — при любом выборе репера $\mathfrak{R}$.

§ 54. Измерение объемов в вещественном евклидовом пространстве

Мы выражали объем какой-либо n-мерной области D в n-мерном вещественном аффинном пространстве посредством интеграла

$$V_D = \int\limits_D dx^1\, dx^2 \ldots dx^n, \tag{54.1}$$