откладываются от фиксированной точки O^*. Мы же вместо этого взяли все n ортов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, но, составляя их линейные комбинации, искусственно ограничились лишь вещественными коэффициентами.

Почти столь же просто можно выделить в n-мерном комплексном евклидовом пространстве и псевдоевклидово пространство, тоже n-мерное и обладающее любым индексом $k=0, 1, \ldots, n$. Для этого достаточно взять за основу вместо какого-нибудь ортонормированного репера $\mathfrak{R}\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ репер

$$\tilde{\mathfrak{R}}\{O, i\mathbf{e}_1, \ldots, i\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}, \tag{53.1}$$

т. е. помножить первые k векторов на i (это вполне возможно, так как мы находимся в комплексном пространстве). Нетрудно заметить, что тем самым эти векторы из единичных превратятся в мнимоединичные.

Рассмотрим теперь совокупность точек и векторов, имеющих вещественные координаты x^i относительно репера $\tilde{\mathfrak{R}}$. Совершенно так же, как и ранее, убеждаемся, что мы получили вещественное n-мерное аффинное пространство. Кроме того, это пространство снабжено метрикой

$$\mathbf{x}^2 = -x^{1^2} - \ldots - x^{k^2} + x^{k+1^2} + \ldots + x^{n^2}, \tag{53.2}$$

так как вектор $\mathbf{x}$ с вещественными координатами x^i относительно репера $\tilde{\mathfrak{R}}$ имеет разложение

$$\mathbf{x} = ix^1\mathbf{e}_1 + \ldots + ix^k\mathbf{e}_k + x^{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + \ldots + x^n\mathbf{e}_n, \tag{53.3}$$

откуда легко получается (53.2) почленным возведением в скалярный квадрат. Мы действительно выделили псевдоевклидово пространство индекса k.

В ряде случаев бывает полезным трактовать этим путем вещественные евклидовы пространства как подпространства комплексного евклидова пространства того же (в комплексном смысле!) числа измерений n. Конечно, такое выделение вещественных евклидовых пространств совершается бесчисленным количеством способов — при любом выборе репера $\mathfrak{R}$.

§ 54. Измерение объемов в вещественном евклидовом пространстве

Мы выражали объем какой-либо n-мерной области D в n-мерном вещественном аффинном пространстве посредством интеграла

$$V_D = \int\limits_D dx^1\,dx^2 \ldots dx^n, \tag{54.1}$$

вычисленного в какой-либо аффинной координатной системе (§ 37). Этот интеграл не имеет, конечно, определенного численного значения и является (знакопостоянным) относительным инвариантом веса — 1, т. е. он преобразуется по закону

$$V'_D = V_D \,|\, \mathrm{Det} \,|\, A^i_{i'} \,|\,|^{-1}. \tag{54.2}$$

В случае евклидова пространства мы сужаем *определение объема*, а именно, *объемом области D мы называем интеграл V_D, вычисленный в любой ортонормированной координатной системе.*

Объем в евклидовом смысле будет уже *инвариантом*, так как при переходе от одного ортонормированного репера к другому всегда

$$\mathrm{Det} \,|\, A^i_{i'} \,| = \pm 1,$$

а следовательно, (54.2) дает

$$V'_D = V_D. \tag{54.3}$$

Таким образом, теперь объем данной области D имеет вполне определенное численное значение. При этом следует иметь в виду, что задание объема в евклидовом смысле влечет его задание и в аффинном смысле: раз для данной области D известен интеграл V_D, вычисленный в ортонормированных координатах, то он будет известен и в любых аффинных координатах — достаточно воспользоваться законом преобразования (54.2), — а это и означает задание объема в аффинном смысле.

Обратно, если в евклидовом пространстве нам задан объем некоторой области D в аффинном смысле, т. е. известен интеграл V_D, вычисленный в любых аффинных и, в частности, ортонормированных координатах, то, значит, известен объем и в евклидовом смысле.

В дальнейшем будем заниматься свойствами объемов в евклидовом смысле; будем обозначать эти объемы W_D. Объем составной области $D = D_1 + D_2$, где D_1 и D_2 — неперекрывающиеся составляющие области, по элементарному свойству кратного интеграла будет равен сумме объемов этих областей:

$$W_D = W_{D_1} + W_{D_2}. \tag{54.4}$$

Далее, если D и D^* — конгруэнтные области, т. е. переводятся одна в другую движением евклидова пространства, то их объемы одинаковы

$$W_D = W_{D^*}. \tag{54.5}$$

В самом деле, будем вычислять интеграл (54.1) для областей D и D^*, причем в первом случае берем координаты $x^1, \ldots, x^n$ относительно какого-либо ортонормированного репера $\mathfrak{R}$, а во втором случае — относительно репера $\mathfrak{R}^*$, полученного из $\mathfrak{R}$ тем движением, которое переводит D в D^*. Координаты x^i каждой точки области D^* относительно $\mathfrak{R}^*$ будут такими же, как координаты соответствующей точки области D относительно $\mathfrak{R}$, так что переменные под знаком интеграла пробегают в обоих случаях одну и ту же область изменения, и интегралы будут равны.

В ортонормированной координатной системе объем W_D области D выражается интегралом (54.1). В произвольной же аффинной координатной системе этот интеграл меняет свое значение, а именно, ведет себя как знакопостоянный относительный инвариант веса — 1, так что объема (в евклидовом смысле), вообще говоря, не выражает.

Мы хотим все-таки получить выражение объема в произвольных аффинных координатах; в таком случае удобнее всего домножить интеграл (54.1) на (тоже знакопостоянный) инвариант веса + 1, так чтобы в результате получился бы уже настоящий инвариант, выражающий евклидов объем W_D области D в любой аффинной координатной системе.

Простейшим инвариантом веса 2, связанным с метрикой евклидова пространства, является определитель, составленный из координат метрического тензора

$$g = \operatorname{Det} | g_{ij} |. \tag{54.6}$$

Действительно, согласно (39.17) при переходе из одной аффинной координатной системы в другую

$$g' = (\operatorname{Det} | A^i_{i'} |)^2 \cdot g. \tag{54.7}$$

Очевидно, g и g' имеют всегда одинаковые знаки: мы находимся в вещественном евклидовом пространстве, так что $(\operatorname{Det} | A^i_{i'} |)^2 > 0$. Чтобы получить теперь относительный инвариант веса 1, достаточно взять $\sqrt{g}$, причем, чтобы не иметь дела с мнимостями, мы предпочтем взять $\sqrt{|g|}$. Беря обе части (54.7) по модулю и извлекая из них квадратные корни (со знаком +), получаем:

$$\sqrt{|g'|} = | \operatorname{Det} | A^i_{i'} | | \cdot \sqrt{|g|}. \tag{54.8}$$

Таким образом, $\sqrt{|g|}$ есть знакопостоянный относительный инвариант веса + 1, и перемножая (54.2) и (54.8) почленно, получаем:

$$\sqrt{|g'|} \cdot V'_D = \sqrt{|g|} \cdot V_D, \tag{54.9}$$

т. е. произведение $\sqrt{|g|} \cdot V_D$ есть инвариант преобразования аффинных координат. Этот инвариант совпадает с W_D:

$$W_D = \sqrt{|g|} \cdot V_D = \sqrt{|g|} \int\limits_D dx^1 \ldots dx^n. \tag{54.10}$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно записать (54.10) *в ортонормированной* координатной системе; тогда $g_{ij}=\begin{cases} 0\ (i \neq j) \\ \pm 1\ (i=j) \end{cases}$, $g=\pm 1$, $\sqrt{|g|}=1$, и мы получаем верное равенство

$$W_D=\int\limits_D dx^1 \ldots dx^n.$$

Особо следует заняться измерением объемов n-мерных параллелепипедов.

Пусть параллелепипед построен на (линейно независимых) векторах $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$. Интеграл (54.1), распространенный по нашему параллелепипеду, в любой аффинной координатной системе выражается формулой (37.13):

$$V_D=|\operatorname{Det}\|a_k^i\||, \tag{54.11}$$

где a_k^i — координаты вектора $\mathbf{a}_k$. Следовательно, согласно (54.10) евклидов объем параллелепипеда выражается формулой

$$W_D=\sqrt{|g|}\cdot|\operatorname{Det}\|a_k^i\||. \tag{54.12}$$

В частности, в ортонормированной координатной системе $g=\pm 1$, и следовательно,

$$W_D=|\operatorname{Det}\|a_k^i\||.$$

Эта формула при $n=3$ хорошо известна из элементарной аналитической геометрии.

Все сказанное относительно вычисления объемов в n-мерном евклидовом пространстве остается справедливым и для его m-мерных *неизотропных* плоскостей, поскольку они также несут на себе евклидову метрику. В результате объемы плоских m-мерных областей также получают определенные *численные значения*. В связи с этим (в отличие от аффинного пространства) мы можем сравнивать m-мерные объемы областей, расположенных в каких угодно (а не только параллельных) m-мерных плоскостях. Однако плоскости эти должны быть неизотропными; для изотропных же плоскостей мы не имеем никакого прогресса сравнительно с аффинным случаем.

В § 37 было выяснено, что задание простого отличного от нуля m-вектора в вещественном аффинном пространстве равносильно заданию m-мерной плоскости R_m (с точностью до параллельного сдвига) с определенной ориентацией и с определенным объемом, указанными на ней. При этом, если простой m-вектор имел вид $[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m]$, то речь шла об объеме m-мерного параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ (линейно независимых в силу $[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m] \neq 0$).

Применяя этот результат в нашем вещественном евклидовом пространстве, мы вправе понимать объем параллелепипеда в евклидовом смысле (если плоскость неизотропная), так как задание объема в аффинном смысле равносильно — при наличии евклидовой метрики — его заданию в евклидовом смысле.

Мы хотим выяснить теперь, как будет выражаться евклидов объем, отвечающий нашему простому m-вектору $[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m] \neq 0$, *через его координаты* $a^{i_1 \ldots i_m}$ и, конечно, через координаты метрического тензора g_{ij} (в произвольной аффинной координатной системе).

Один из простейших инвариантов, которые можно составить из указанных тензоров, мы будем называть *скалярным квадратом* m-вектора и определять путем свертывания следующим образом:

$$I = m!\, g_{i_1 j_1} g_{i_2 j_2} \ldots g_{i_m j_m} a^{i_1 i_2 \ldots i_m} a^{j_1 j_2 \ldots j_m}. \qquad (54.13)$$

Множитель $m!$ добавлен для упрощения окончательного результата. Здесь имеет смысл выделить в качестве леммы следующее предложение. *Пусть происходит свертывание тензоров* $b_{i_1 \ldots i_m}$ *и* $a^{i_1 \ldots i_m}$, *причем тензор* $a^{i_1 \ldots i_m}$ *кососимметрический. Тогда*

$$b_{i_1 \ldots i_m} a^{i_1 \ldots i_m} = b_{[i_1 i_2 \ldots i_m]} a^{i_1 i_2 \ldots i_m}, \qquad (54.14)$$

т. е. результат свертывания не меняется, если тензор $b_{i_1 \ldots i_m}$ *подвергнуть предварительно альтернации и сделать, таким образом, тоже кососимметрическим.*

Чтобы проверить равенство (54.14), достаточно обнаружить, что каждая координата $a^{p_1 \ldots p_m}$ входит в правую и левую части с одинаковыми коэффициентами (после приведения подобных членов). При этом мы рассматриваем лишь координаты $a^{p_1 \ldots p_m}$, при которых все индексы $p_1, \ldots, p_m$ различны, так как все прочие координаты равны нулю.

В процессе суммирования в левой части (54.14) каждая координата $a^{p_1 \ldots p_m}$ встретится $m!$ раз, а именно, когда $i_1, \ldots, i_m$ совпадают с $p_1, \ldots, p_m$ или получаются из них произвольной подстановкой; в случае нечетной подстановки $a^{p_1 \ldots p_m}$ входит с обратным знаком. В результате коэффициент при $a^{p_1 \ldots p_m}$ будет иметь вид

$$\sum \pm b_{i_1 \ldots i_m}, \qquad (54.15)$$

где суммирование идет по перестановкам $i_1 \ldots i_m$ индексов $p_1 \ldots p_m$, а знак $\pm$ берется в зависимости от четности или нечетности соответствующей подстановки. Но по определению альтернации (§ 31) сумма (54.15) после деления на $m!$ дает координату проальтернированного тензора $b_{p_1 \ldots p_m}$:

$$b_{[p_1 \ldots p_m]} = \frac{1}{m!} \sum \pm b_{i_1 \ldots i_m},$$

так что

$$\sum \pm b_{i_1 \ldots i_m} = m! b_{[p_1 \ldots p_m]}. \tag{54.16}$$

Далее мы подсчитываем коэффициент при $a^{p_1 \ldots p_m}$ в правой части равенства (54.14), который совершенно аналогично (54.15) оказывается равным

$$\sum \pm b_{[i_1 \ldots i_m]}. \tag{54.17}$$

Суммирование снова идет по перестановкам $i_1 \ldots i_m$ индексов $p_1 \ldots p_m$. При этом в силу косой симметрии тензора $b_{[i_1 \ldots i_m]}$

$$b_{[i_1 \ldots i_m]} = \pm b_{[p_1 \ldots p_m]},$$

где знак $\pm$ зависит от четности или нечетности соответствующей подстановки. Следовательно, все слагаемые под знаком суммы (54.17) равны $b_{[p_1 \ldots p_m]}$, так что

$$\sum \pm b_{[i_1 \ldots i_m]} = m! b_{[p_1 \ldots p_m]}. \tag{54.18}$$

Сравнивая равенства (54.16) и (54.18), убеждаемся, что коэффициенты при $a^{p_1 \ldots p_m}$ в правой и левой частях (54.14) равны, и следовательно, лемма доказана.

Используя эту лемму для инварианта (54.13), мы можем, не меняя ничего по существу, произвести предварительно альтернацию по индексам $i_1 i_2 \ldots i_m$ в произведении *координат метрического тензора*. Выполним сначала эту альтернацию (с умножением на $m!$):

$$m!\, g_{\underset{[i_1}{i_1} j_1} g_{\underset{i_2}{i_2} j_2} \ldots g_{\underset{i_m]}{i_m} j_m} = \\ = \begin{vmatrix} g_{i_1 j_1} & g_{i_1 j_2} & \ldots & g_{i_1 j_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{i_m j_1} & g_{i_m j_2} & \ldots & g_{i_m j_m} \end{vmatrix} = g_{i_1 i_2 \ldots i_m;\, j_1 j_2 \ldots j_m}. \tag{54.19}$$

Запись результата альтернации в виде определителя, деленного на $m!$, получается совершенно аналогично (35.1). Из свойств определителя видно, что полученный тензор будет кососимметрическим не только по индексам $i_1 i_2 \ldots i_m$, но и по индексам $j_1 j_2 \ldots j_m$. Кратким обозначением полученного тензора будет служить $g_{i_1 i_2 \ldots i_m;\, j_1 j_2 \ldots j_m}$.

Теперь (54.13) можно переписать в виде

$$I = g_{i_1 \ldots i_m;\, j_1 \ldots j_m} a^{i_1 \ldots i_m} a^{j_1 \ldots j_m}. \tag{54.20}$$

Чтобы установить геометрический смысл этого инварианта, мы рассмотрим аффинный репер, в котором первые m векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ принадлежат m-мерной плоскости R_m нашего m-вектора $[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m]$.

В этом репере векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ полностью разлагаются по $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$, а потому их координаты с индексами

$$i = m+1,\ m+2,\ \ldots,\ n$$

равны нулю. Согласно (35.1) равны нулю будут и все координаты простого m-вектора $a^{i_1 i_2 \ldots i_m}$, среди индексов которых встречается хоть один, больший чем m.

В результате в процессе свертывания (54.20) можно считать, что все индексы пробегают значения лишь $1, 2, \ldots, m$. Теперь нужно учесть, что $a^{i_1 \ldots i_m}$ — кососимметрический тензор, а потому при наличии двух одинаковых индексов его координаты обращаются в нуль. В сумме следует сохранить поэтому лишь те слагаемые, где все индексы $i_1 \ldots i_m$ (и аналогично $j_1 \ldots j_m$) различны между собой, т. е. получены из $1, 2, \ldots, m$ некоторыми подстановками.

В частности, в сумму (54.20) войдет слагаемое

$$g_{12 \ldots m;\, 12 \ldots m} a^{12 \ldots m} a^{12 \ldots m}, \tag{54.21}$$

для которого $i_1 i_2 \ldots i_m = 12 \ldots m$ и $j_1 j_2 \ldots j_m = 12 \ldots m$, а все остальные слагаемые будут получаться из этого всевозможными подстановками индексов $i_1 \ldots i_m$ и индексов $j_1 \ldots j_m$. Всего, таким образом, в сумме будет $(m!)^2$ слагаемых. Но в силу кососимметричности тензоров $a^{i_1 \ldots i_m}$ и $g_{i_1 \ldots i_m;\, j_1 \ldots j_m}$ относительно $i_1 \ldots i_m$ произведение этих тензоров не меняется при любой подстановке индексов $i_1 \ldots i_m$ (так как или оба множителя не меняются или оба меняют знак). То же справедливо и для индексов $j_1 \ldots j_m$. Поэтому в сумме (54.20) все слагаемые равны между собой и совпадают с (54.21), а так как их число равно $(m!)^2$, то окончательно

$$I = g_{12 \ldots m;\, 12 \ldots m} (m!\, a^{12 \ldots m})^2. \tag{54.22}$$

Согласно (35.1)

$$m!\, a^{12 \ldots m} = \operatorname{Det} |a_k^l| \quad (l,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{54.23}$$

В правой части мы получаем определитель, составленный из координат векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ относительно репера $\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ в нашей m-мерной плоскости R_m.

Далее, согласно (54.19)

$$g_{12\ldots m;\,12\ldots m}=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \ldots & g_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{m1} & g_{m2} & \ldots & g_{mm} \end{vmatrix}=\tilde{g}, \tag{54.24}$$

где $\tilde{g}$, таким образом,— определитель метрического тензора плоскости R_m.

Теперь (54.22) принимает вид

$$I=\tilde{g}\cdot(\mathrm{Det}\,|\,a^i_k\,|)^2. \tag{54.25}$$

Теперь мы можем установить *геометрический смысл инварианта* I, *который определен для какого-либо простого* m*-вектора* $[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m]$ *с координатами* $a^{i_1 i_2 \ldots i_m}$ *при помощи формул* (54.13), *или, что то же*, (54.20).

Если $I\neq 0$, *то, как видно из* (54.25), $\tilde{g}\neq 0$ *и, следовательно, плоскость* R_m *данного простого* m*-вектора неизотропная и*

$$|I|=W_D^2, \tag{54.26}$$

где W_D — *евклидов объем* m*-мерного параллелепипеда, построенного на векторах* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$.

В самом деле, применяя к m-мерному параллелепипеду на плоскости R_m формулу (54.12), получаем:

$$W_D=\sqrt{|\tilde{g}\,|}\,|\,\mathrm{Det}\,|\,a^i_k\,||\qquad (i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{54.27}$$

Сравнивая эту формулу с (54.25), мы приходим к (54.26).

Если $I=0$, *то из* (54.25) *следует, что* $\tilde{g}=0$, *а следовательно, плоскость* R_m *данного простого* m*-вектора изотропная* ($\mathrm{Det}\,|\,a^i_k\,|\neq 0$, *так как* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ *линейно независимы*).

Окончательно, объем m-мерного параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ (в неизотропной R_m), выражается через соответствующий m-вектор $[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m]$ следующим образом:

$$W_D=\sqrt{|I|},$$

т. е.

$$W_D=\sqrt{|\,g_{i_1\ldots i_m;\,j_1\ldots j_m}a^{i_1\ldots i_m}a^{j_1\ldots j_m}|}=$$

$$=\sqrt{m!\,|\,g_{i_1 j_1}\ldots g_{i_m j_m}a^{i_1\ldots i_m}a^{j_1\ldots j_m}|}. \tag{54.28}$$

Добавим сюда еще одну формулу для объема m-мерного параллелепипеда. А именно, если за векторы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ принять, в частности, просто $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$, то

$$a^i_k=\begin{cases} 0\ (i\neq k) \\ 1\ (i=k) \end{cases},\qquad \mathrm{Det}\,|\,a^i_k\,|=1,$$

и (54.25) принимает вид

$$I = \tilde{g} = \operatorname{Det}|g_{ij}| \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Но, как мы знаем,

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j,$$

в нашем случае, следовательно,

$$g_{ij} = \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

и мы получаем:

$$I = \operatorname{Det}|\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j| \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{54.29}$$

Отсюда

$$W_D = \sqrt{|\operatorname{Det}|\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j||}, \tag{54.30}$$

т. е. объем m-мерного параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$, равен корню квадратному из модуля определителя, составленного из попарных скалярных произведений векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$. Эта формула при $m = 2$, 3 известна из обычной векторной алгебры.

§ 55*. Понятие о геометрическом объекте

Мы занимались до сих пор n-мерными пространствами двух видов: аффинным и евклидовым. В аффинном пространстве мы ввели аффинные реперы $\mathfrak{R}\{O,\ \mathbf{e}_1,\ \ldots,\ \mathbf{e}_n\}$, в многообразии которых установили две однотранзитивные группы взаимно однозначных преобразований: аффинных и квазиаффинных преобразований. При аффинном преобразовании реперы просто увлекаются данным автоморфизмом аффинного пространства; при квазиаффинном преобразовании каждый репер $\mathfrak{R}$ переходит в новый репер $\mathfrak{R}'$, расположенный относительно него вполне определенным образом, одинаковым при любом выборе исходного репера.

Последнее означает, что векторы репера $\mathfrak{R}'$ и сдвиг его начала разлагаются по векторам репера $\mathfrak{R}$ с фиксированными численными значениями коэффициентов $A^i_{i'}$, A^i:

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'} \mathbf{e}_i, \qquad \overrightarrow{OO^*} = A^i \mathbf{e}_i. \tag{55.1}$$

С понятием квазиаффинного преобразования в многообразии реперов тесно связано понятие тензора, хотя до сих пор это и не было показано у нас явно. Действительно, координаты тензора, например, V^i_{jk} имеют определенные численные значения при определенном вы-