и (54.25) принимает вид

$$I=\tilde{g}=\operatorname{Det}|g_{ij}| \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Но, как мы знаем,

$$g_{ij}=\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j,$$

в нашем случае, следовательно,

$$g_{ij}=\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

и мы получаем:

$$I=\operatorname{Det}|\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j| \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{54.29}$$

Отсюда

$$W_D=\sqrt{|\operatorname{Det}|\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j||}, \tag{54.30}$$

т. е. объем m-мерного параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$, равен корню квадратному из модуля определителя, составленного из попарных скалярных произведений векторов $\mathbf{a}_1, \ldots$ $\ldots, \mathbf{a}_m$. Эта формула при $m=2, 3$ известна из обычной векторной алгебры.

§ 55*. Понятие о геометрическом объекте

Мы занимались до сих пор n-мерными пространствами двух видов: аффинным и евклидовым. В аффинном пространстве мы ввели аффинные реперы $\mathfrak{R}\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, в многообразии которых установили две однотранзитивные группы взаимно однозначных преобразований: аффинных и квазиаффинных преобразований. При аффинном преобразовании реперы просто увлекаются данным автоморфизмом аффинного пространства; при квазиаффинном преобразовании каждый репер $\mathfrak{R}$ переходит в новый репер $\mathfrak{R}'$, расположенный относительно него вполне определенным образом, одинаковым при любом выборе исходного репера.

Последнее означает, что векторы репера $\mathfrak{R}'$ и сдвиг его начала разлагаются по векторам репера $\mathfrak{R}$ с фиксированными численными значениями коэффициентов $A_{i'}^{i}$, A^i:

$$\mathbf{e}_{i'}=A_{i'}^{i}\mathbf{e}_i, \qquad \overrightarrow{OO^*}=A^i\mathbf{e}_i. \tag{55.1}$$

С понятием квазиаффинного преобразования в многообразии реперов тесно связано понятие тензора, хотя до сих пор это и не было показано у нас явно. Действительно, координаты тензора, например, V_{jk}^{i} имеют определенные численные значения при определенном выборе репера $\mathfrak{R}$, т. е. являются, можно сказать, функциями репера $\mathfrak{R}$:

$$V^i_{jk} = V^i_{jk}(\mathfrak{R}). \tag{55.2}$$

Однако выбор этих функций далеко не является произвольным: когда мы подвергаем реперы $\mathfrak{R}$ данному квазиаффинному преобразованию (55.1), координаты тензора подвергаются тоже вполне определенному преобразованию:

$$V^{i'}_{j'k'} = A^{i'}_i A^j_{j'} A^k_{k'} V^i_{jk}. \tag{55.3}$$

Мы можем рассматривать при этом не один какой-либо тензор V^i_{jk}, а всевозможные тензоры данного строения; тогда численные значения V^i_{jk}, отвечающие данному тензору, могут быть какими угодно. В результате *вслед за каждым квазиаффинным преобразованием* (55.1) *в многообразии реперов мы получаем линейное преобразование* (55.3) *над переменными V^i_{jk} или, если угодно, линейное преобразование в n^3-мерном пространстве переменных V^i_{jk}* *).

При этом, как мы проверяли в свое время (§ 32), наложению двух преобразований (55.1) отвечает наложение соответствующих преобразований (55.3).

Пусть каждому элементу некоторой группы G однозначно сопоставлено взаимно однозначное преобразование данного множества $\mathfrak{M}$ в себя, причем перемножению элементов группы отвечает наложение соответствующих преобразований в том же порядке (а тогда единице группы отвечает тождественное преобразование и обратному элементу — обратное преобразование). В этом случае мы говорим, что нам дано *представление группы G в виде группы преобразований множества $\mathfrak{M}$ в себя.* (При этом мы, вообще говоря, не требуем, чтобы соответствие между элементами G и преобразованиями в $\mathfrak{M}$ было *взаимно* однозначным.)

В нашем случае мы имеем *линейное представление квазиаффинной группы, именно, представление в виде группы линейных преобразований* (55.3) *в n^3-мерном пространстве переменных* V^i_{jk}; это пространство играет роль множества $\mathfrak{M}$.

---

*) Заметим, что, говоря о тензоре данного строения, можно учитывать и линейные зависимости (обязательно инвариантные), наложенные, возможно, на его координаты. Так, например, можно рассматривать вместо всевозможных тензоров V^i_{jk} лишь кососимметрические по нижним индексам, т. е. удовлетворяющие линейным зависимостям $V^i_{jk} = -V^i_{kj}$. Тогда, беря всевозможные такие тензоры, мы располагаем не n^3, а $\frac{n^2(n-1)}{2}$ *независимыми* координатами и получаем линейное представление фактически в $\frac{n^2(n-1)}{2}$-мерном пространстве.

Нетрудно заметить, что задание этого *линейного представления квазиаффинной группы и есть самое существенное в понятии тензора.* В самом деле, если линейное представление (55.3) задано, то каждый отдельный тензор данного типа (в нашем примере один раз контравариантный и два раза ковариантный) можно получить следующим образом: какому-нибудь реперу $\mathfrak{R}$ сопоставляем произвольно выбранную точку (V^i_{jk}) в пространстве представления, а затем любому другому реперу $\mathfrak{R}'$ сопоставляем точку $(V^{i'}_{j'k'})$, пользуясь законом преобразования (55.3). Более подробно: берем квазиаффинное преобразование в многообразии реперов, переводящее $\mathfrak{R}$ в $\mathfrak{R}'$; ему отвечает определенное линейное преобразование (55.3) в пространстве представления; это преобразование переводит точку (V^i_{jk}) в некоторую точку $(V^{i'}_{j'k'})$, которую мы и ставим в соответствие реперу $\mathfrak{R}'$:

$$V^{i'}_{j'k'} = V^i_{jk}(\mathfrak{R}').$$

По существу мы повторили лишь в иных терминах построение тензора по наперед заданным его координатам в какой-нибудь одной координатной системе (§ 32). Но теперь перед нами открывается путь к естественному обобщению понятия тензора. В самом деле, почему линейное представление квазиаффинной группы должно иметь вид обязательно тензорного закона преобразования, как, например, (55.3)? Можно предположить, что существуют и другие линейные представления квазиаффинной группы, которые можно положить в основу определения величин, аналогичных тензорам, но с иным законом преобразования.

Пусть в N-мерном пространстве некоторых переменных

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$$

нам задано линейное представление квазиаффинной группы. Это значит, что каждому квазиаффинному преобразованию (55.1) *однозначно сопоставлено линейное преобразование переменных* φ_p $(p = 1, 2, \ldots, N)$:

$$\varphi_{p'} = \sum_{p=1}^{N} B^p_{p'}\varphi_p + B_{p'}, \qquad \operatorname{Det}|B^p_{p'}| \neq 0, \tag{55.4}$$

так, что результирующему преобразованию двух квазиаффинных преобразований всегда сопоставлено результирующее преобразование соответствующих линейных преобразований.

Коэффициенты $B^p_{p'}$, $B_{p'}$ являются, конечно, функциями от коэффициентов $A^{\bar{i}}_{i'}$, A^i квазиаффинного преобразования. *Эти функции мы будем предполагать непрерывными.* Заметим, между прочим (это можно было бы доказать), что тогда эти функции (по крайней мере в вещественном случае) являются обязательно непрерывно дифференцируемыми и даже аналитическими*). Нам, впрочем, это не понадобится.

Сопоставим теперь какому-нибудь реперу $\mathfrak{R}$ произвольную точку φ_p в пространстве переменных φ_p. Любому другому реперу $\mathfrak{R}'$ сопоставим точку $\varphi_{p'}$, полученную из φ_p тем линейным преобразованием (55.4), которое отвечает квазиаффинному преобразованию $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$ (т. е. переводящему $\mathfrak{R}$ в $\mathfrak{R}'$).

В таком случае каждому реперу $\mathfrak{R}'$ будет сопоставлена точка

$$\varphi_{p'} = \varphi_p(\mathfrak{R}'),$$

причем при переходе от любого репера $\mathfrak{R}'$ к любому реперу $\mathfrak{R}''$ будет действовать закон преобразования (55.4):

$$\varphi_{p''} = \sum_{p'=1}^{N} B_{p''}^{p'} \varphi_{p'} + B_{p''}, \tag{55.5}$$

где коэффициенты $B_{p''}^{p'}$, $B_{p''}$ отвечают квазиаффинному преобразованию $\mathfrak{R}' \to \mathfrak{R}''$.

Чтобы проверить равенство (55.5), рассмотрим его правую часть. Она представляет собой результат последовательного выполнения над φ_p линейных преобразований (55.4) и (55.5), отвечающих квазиаффинным преобразованиям $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$ и $\mathfrak{R}' \to \mathfrak{R}''$. Результирующее линейное преобразование над φ_p отвечает, следовательно, результирующему квазиаффинному преобразованию

$$\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}''$$

и, следовательно, согласно нашему построению дает

$$\varphi_p(\mathfrak{R}'') = \varphi_{p''}.$$

Этим (55.5) доказано.

Мы будем говорить, что нам дан линейный геометрический объект в n-мерном аффинном пространстве, если каждому реперу $\mathfrak{R}$ сопоставлены N занумерованных чисел $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$, которые при переходе от репера $\mathfrak{R}$ к реперу $\mathfrak{R}'$ подвергаются линейному преобразованию (55.4), *отвечающему в данном линейном представлении квазиаффинному преобразованию $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$. Числа $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ мы будем называть координатами линейного геометрического объекта относительно данного репера.*

Таким образом, для определения линейного геометрического объекта в аффинном пространстве нужно задаться прежде всего соответствующим законом преобразования (55.4), т. е. некоторым линейным представлением квазиаффинной группы. Мы будем говорить, что это *линейное представление определяет тип линейного*

*) В комплексном случае этому заключению может помешать комплексная сопряженность, входящая в выражение функциональной зависимости.

геометрического объекта. Затем любой линейный геометрический объект данного типа можно получить, задавшись произвольно его координатами φ_p для одного какого-нибудь репера $\mathfrak{R}$.

Очевидно, тензоры являются частным случаем линейных геометрических объектов.

Можно рассматривать и нелинейные геометрические объекты, т. е. такие, для которых закон преобразования координат φ_p является нелинейным и выражает некоторое нелинейное представление квазиаффинной группы в пространстве переменных $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$. В остальном понятие геометрического объекта в общем (нелинейном) случае строится аналогичным образом. Мы будем во всем дальнейшем заниматься лишь линейными геометрическими объектами, которые при современном состоянии теории геометрических объектов играют преобладающую роль.

В предыдущем изложении мы кое-где пользовались термином «геометрический объект» в наглядном смысле — в смысле какого-то геометрического образа или конструкции. Теперь мы будем употреблять этот термин лишь в указанном точном смысле. Однако не нужно считать, что мы существенно изменили содержание понятия «геометрический объект»; мы его лишь уточнили. Действительно, основные геометрические образы и конструкции будут характеризоваться геометрическими объектами в том смысле, как мы теперь этот термин понимаем. Возьмем, например, такой основной геометрический образ, как точка. Когда мы переходим от репера $\mathfrak{R}$ к реперу $\mathfrak{R}'$ квазиаффинным преобразованием (55.1), координаты x^i каждой фиксированной точки M подвергаются, как мы знаем, преобразованию

$$x^{i'} = A_i^{i'} x^i + A^{i'}, \tag{55.6}$$

где $A_i^{i'}$ — матрица, обратная $A_{i'}^i$, а $A^{i'} = -A_i^{i'} A^i$ (см. (51.2)).

Можно считать, что формула преобразования координат (55.6) есть частный случай (55.4) (линейного представления квазиаффинной группы), а координаты точки x^i являются примером линейного геометрического объекта φ_p.

Роль коэффициентов $B_{p'}^p$, $B_{p'}$ играют $A_i^{i'}$, $A^{i'}$, которые действительно, как только что было у нас отмечено, являются функциями $A_{i'}^i$, A^i. Таким образом, точка находит себе выражение в виде линейного геометрического объекта, координаты которого совпадают с ее координатами, а закон преобразования имеет вид формулы преобразования координат (55.6).

Аналогичным образом коэффициенты уравнения данной гиперплоскости (или гиперповерхности 2-го порядка) образуют линейный геометрический объект, который, так сказать, является представителем соответствующего геометрического образа.