§ 56*. Линейные геометрические объекты в аффинном и евклидовом пространстве

Теперь естественно поставить вопрос о том, какого же вида линейные геометрические объекты возможны в аффинном пространстве. Прежде всего мы сузим постановку вопроса, а именно, ограничимся лишь теми объектами $\varphi_p(\mathfrak{R})$, которые реагируют только на изменение векторов $\mathbf{e}_i$ репера $\mathfrak{R}$, но не реагируют на сдвиг его начала. Другими словами, мы предположим, что коэффициенты преобразования (55.4) зависят только от $A^i_{i'}$, но не зависят от A^i, так что квазиаффинное преобразование, сводящееся к параллельному сдвигу репера, порождает *тождественное* линейное преобразование (55.4) и координаты объекта не меняются.

Наибольшую роль играют аффинные геометрические объекты именно этого упрощенного вида (заметим, однако, что точки уже не входят в их число).

В частности, они появляются при переходе из аффинного пространства в более простое *центроаффинное* пространство. Так называется аффинное пространство с раз навсегда фиксированной в нем точкой O — центром пространства. Группа автоморфизмов центроаффинного пространства состоит, очевидно, из аффинных преобразований, сохраняющих точку O неподвижной (центроаффинные преобразования). В качестве реперов центроаффинного пространства можно принять всевозможные аффинные реперы с общим началом в центре O. Действительно, каждый репер с началом в O переводится центроаффинным преобразованием снова в репер с началом O и каждой паре таких реперов отвечает одно и только одно центроаффинное преобразование, переводящее первый репер во второй.

Квазицентроаффинное преобразование сводится к линейному преобразованию векторов каждого репера

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{e}_i \tag{56.1}$$

при постоянном начале O. Линейный геометрический объект в центроаффинном пространстве определяется совершенно так же, как и в аффинном, с той только разницей, что теперь коэффициенты $B^p_{p'}$, $B_{p'}$ в законе преобразования (55.4) должны зависеть от коэффициентов квазицентроаффинного преобразования, т. е. только от $A^i_{i'}$ (ввиду отсутствия A^i в формуле квазицентроаффинного преобразования (55.1)). В результате мы приходим снова к линейным геометрическим объектам упрощенного вида, *где в закон преобразования* (55.4) *входят только* $A^i_{i'}$. *Такие линейные геометрические объекты мы будем называть центроаффинными.*

Итак, центроаффинные линейные геометрические объекты появляются в двух случаях: или мы имеем дело в аффинном пространстве с таким объектом, координаты которого не меняются при параллельном сдвиге репера (например, координаты вектора), или мы имеем дело с объектом в центроаффинном пространстве, где выделена точка О, играющая особую роль, так что естественно ограничиться реперами с началом в этой точке.

Последний случай встречается при дифференциально-геометрическом исследовании сложной конструкции в бесконечно малой окрестности любой ее точки; тогда эту точку естественно принимать за центр пространства.

Итак, в дальнейшем мы ограничимся центроаффинными линейными геометрическими объектами (для краткости мы будем называть их просто центроаффинными объектами), причем будем предполагать, кроме того, что закон преобразования (55.4) является линейным *однородным:*

$$\varphi_{p'} = \sum_{p=1}^{N} B_{p'}^{p} \varphi_p, \tag{56.2}$$

где $B_{p'}^{p}$ суть функции $A_{i'}^{i}$.

Здесь на основании теории линейных представлений групп Ли можно утверждать следующее (приводим без доказательства).

Пока мы рассматриваем унимодулярные преобразования (56.1), т. е. пока $\operatorname{Det}|A_{i'}^{i}| = 1$, соответствующий закон преобразования (56.2) является *в вещественном случае* по существу тензорным; точнее, величины $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ за счет линейного преобразования с постоянными коэффициентами могут быть сведены к совокупности координат одного или нескольких тензоров.

Аналогично обстоит дело *в комплексном случае*; только здесь кроме тензоров приходится рассматривать и *псевдотензоры*: так мы будем называть объекты, сходные с тензорами и отличающиеся от них лишь тем, что в законе преобразования (например, (55.3)) множители A все или частично заменяются комплексно сопряженными им величинами.

Если же брать всевозможные линейные преобразования (56.1) ($\operatorname{Det}|A_{i'}^{i}| \neq 0$), то здесь, кроме тензоров, могут встретиться и другие центроаффинные объекты, прежде всего *относительные тензоры*. Так мы будем называть величины, например, V_{jk}^{i}, для которых тензорный закон преобразования осложнен умножением на некоторую степень модуля определителя

$$V_{j'k'}^{i'} = A_{i}^{i'} A_{j'}^{j} A_{k'}^{k} V_{jk}^{i} \,|\operatorname{Det}|A_{p'}^{p}||^{s}. \tag{56.3}$$

Показатель s мы будем называть *весом* относительного тензора. В вещественном случае s может принимать любые вещественные значения, в комплексном — любые комплексные; мы считаем при этом, что

$$|\operatorname{Det}|A^p_{p'}||^s = e^{s \ln|\operatorname{Det}|A^p_{p'}||},$$

где значение логарифма берется вещественное. Конечно, при $s = 0$ относительный тензор превращается в обыкновенный тензор.

Закон преобразования относительного тензора (56.3) можно еще усложнить: в вещественном случае — домножением на -1, когда $\operatorname{Det}|A^p_{p'}|$ является отрицательным, с сохранением прежней формулы, когда $\operatorname{Det}|A^p_{p'}|$ положителен; в комплексном случае — умножением на $e^{m\alpha i}$, где m — любое целое число, а $e^{\alpha i}$ определяется из разложения

$$\operatorname{Det}|A^p_{p'}| = e^{\alpha i}\cdot|\operatorname{Det}|A^p_{p'}||, \tag{56.4}$$

т. е. является тем комплексным числом модуля 1, на которое нужно умножить модуль $\operatorname{Det}|A^p_{p'}|$, чтобы получить сам $\operatorname{Det}|A^p_{p'}|$.

Формула (56.3) заменяется соответственно формулами:

$$\begin{aligned} V^{i'}_{j'k'} &= \operatorname{sign}\operatorname{Det}|A^p_{p'}|\cdot A^{i'}_i A^j_{j'} A^k_{k'} V^i_{jk}\,|\operatorname{Det}|A^p_{p'}||^s = \\ &= \pm A^{i'}_i A^j_{j'} A^k_{k'} V^i_{jk}\cdot|\operatorname{Det}|A^p_{p'}||^s \qquad (\operatorname{Det}|A^p_{p'}| \gtrless 0) \end{aligned} \tag{56.5}$$

в вещественном случае и

$$V^{i'}_{j'k} = e^{m\alpha i} A^{i'}_i A^j_{j'} A^k_{k'} V^i_{jk}\cdot|\operatorname{Det}|A^p_{p'}||^s \tag{56.6}$$

в комплексном случае.

Мы будем говорить, что вещественный относительный тензор с законом преобразования (56.3) *имеет вес s и показатель* 0, *а с законом преобразования* (56.5) — *вес s и показатель* 1, *а комплексный относительный тензор с законом преобразования* (56.6) *имеет вес s и показатель m.*

При $m = 0$ получаем как частный случай (56.3). Формулу (56.5) также можно считать частным случаем (56.6) при $m = 1$, с той только разницей, что в (56.5) мы ограничиваемся вещественными величинами, так что $e^{\alpha i} = \pm 1$.

Далее, в комплексном случае возможны «псевдотензоры», в том числе и относительные, с законом преобразования (56.6), *в котором коэффициенты A все или частично заменены комплексно сопряженными им величинами.* Возможны центроаффинные линейные объекты и более сложного типа, не играющие, впрочем, в геометрии заметной роли. На них мы останавливаться не будем. Существенно, что все возможные усложнения в законе преобразования (не считая перехода к псевдотензорам) связаны здесь с наличием $\operatorname{Det}|A^p_{p'}| \neq 1$ и исчезают в случае $\operatorname{Det}|A^p_{p'}| = 1$.

Существенно иная картина наблюдается в евклидовом пространстве, к которому мы сейчас и переходим. В евклидовом пространстве понятие линейного геометрического объекта вводится совершенно аналогично тому, как мы делали это в аффинном пространстве. При этом вместо квазиаффинной группы в многообразии аффинных реперов *мы исходим из группы квазидвижений в многообразии ортонормированных реперов* и задаемся каким-либо ее линейным представлением в пространстве переменных $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$. А именно, каждому квазидвижению в многообразии ортонормированных реперов) мы сопоставляем линейное преобразование переменных

$$\varphi_{p'} = \sum_{p=1}^{N} B^p_{p'}\varphi_p + B_{p'} \tag{56.7}$$

с таким расчетом, что наложению квазидвижений отвечает наложение соответствующих линейных преобразований (56.7). Коэффициенты $B^p_{p'}$, $B_{p'}$ должны по-прежнему непрерывно зависеть от коэффициентов $A^i_{i'}$, A^i квазидвижения

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{e}_i, \qquad \overrightarrow{OO'} = A^i\mathbf{e}_i, \tag{56.8}$$

где теперь, конечно, матрица $A^i_{i'}$ либо ортогональная комплексная, либо ортогональная вещественная, либо псевдоортогональная, в зависимости от того, в каком евклидовом пространстве мы находимся: в комплексном евклидовом, собственно евклидовом или псевдоевклидовом.

Задание линейного геометрического объекта в евклидовом пространстве означает сопоставление каждому *ортонормированному реперу* $\mathfrak{R}$ чисел $\varphi_1(\mathfrak{R}), \ldots, \varphi_N(\mathfrak{R})$, которые при переходе к другому ортонормированному реперу $\mathfrak{R}'$ подвергаются линейному преобразованию (56.7), отвечающему квазидвижению $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$.

Аналогично аффинному случаю и по тем же причинам мы ограничимся частным случаем линейного геометрического объекта, когда закон преобразования (56.7) не зависит от A^i, т. е. координаты объекта не меняются при параллельном сдвиге репера. Такого частного вида объекты могут быть истолкованы как объекты в *центроевклидовом пространстве,* т. е. евклидовом пространстве с фиксированной точкой O — центром пространства. В самом деле, в центроевклидовом пространстве группа движений сводится к группе вращений около центра O, а в качестве реперов достаточно брать ортонормированные реперы с началом в центре O. Соответственно, вместо группы квазидвижений в многообразии ортонормированных реперов мы можем ограничиться ее подгруппой — *группой квазивращений. Квазивращениями* мы будем называть квазидвижения, при которых начало каждого репера остается неподвижным ($A^i = 0$), так что (56.8) принимает вид

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{e}_i, \qquad \overrightarrow{OO'} = 0. \tag{56.9}$$

Линейные геометрические объекты в центроевклидовом пространстве мы будем кратко называть *центроевклидовыми*. Их мы определяем, исходя из закона преобразования (56.7), где, однако, (56.7) есть линейное представление группы квазивращений (56.9), а не всей группы квазидвижений. Это значит, что коэффициенты в (56.7) зависят только от $A^i_{i'}$, но не от A^i, так что *центроевклидовы объекты совпадают с этим частным случаем линейных геометрических объектов в евклидовом пространстве.*

Кроме того, мы будем предполагать $B_{p'} = 0$. В результате центроевклидов объект задается следующим образом: каждому ортонормированному реперу $\mathfrak{R}$ сопоставлены N чисел $\varphi_1(\mathfrak{R}), \ldots, \varphi_N(\mathfrak{R})$, причем мы ограничиваемся реперами $\mathfrak{R}$ с фиксированным началом O; *эти числа при переходе от одного репера $\mathfrak{R}$ к другому $\mathfrak{R}'$ испытывают линейное преобразование*

$$\varphi_{p'} = \sum_{p=1}^{N} B^p_{p'}\varphi_p, \tag{56.10}$$

отвечающее квазивращению $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$ в некотором линейном представлении группы квазивращений.

В качестве центроевклидовых объектов могут служить прежде всего тензоры, а в комплексном случае — и псевдотензоры, рассматриваемые в ортонормированных реперах. Что же касается относительных тензоров, то мы не сможем их сконструировать ввиду того, что при ортогональном (псевдоортогональном) преобразовании $\mathrm{Det}\,|A^i_{i'}| = \pm 1$ и какую-либо степень модуля этого определителя бесполезно употреблять в качестве дополнительного множителя в тензорном законе преобразования. Единственное, что можно здесь сделать — это условиться о появлении дополнительного множителя $\mathrm{sign}\,\mathrm{Det}\,|A^i_{i'}|$, причем в псевдоевклидовом случае можно брать и другие множители: $\mathrm{sign}\ \mathrm{Det}\,|A^\alpha_{\alpha'}|$ или $\mathrm{sign}\ \mathrm{Det}\,|A^\lambda_{\lambda'}|$ (обозначения § 50).

Зато чрезвычайно важно, что центроевклидовы объекты не исчерпываются тензорами. Существует более широкий класс центроевклидовых объектов — так называемые *спиноры* и *спинтензоры*, играющие существенную роль в современной физике. Правда, при этом приходится несколько расширить понятие о центроевклидовом объекте, допуская его «двузначность» (см. ниже).

В последующих параграфах мы дадим изложение основ теории спиноров в *четырехмерном* евклидовом пространстве. Мы ограничимся случаем $n = 4$ по двум причинам. Во-первых, именно этот случай играет роль в физике; во-вторых, он допускает элементарное изложение, в то время как для общего случая потребовалось бы развивать довольно обширную теорию *). Для сокращения изложения мы будем вынуждены отказаться от наводящих соображений и прямо показать, как строятся спиноры и спинтензоры.

§ 57*. Спинорное пространство

Мы построим теорию спиноров сначала в *комплексном* четырехмерном евклидовом пространстве R_4^+. Пусть $\{\tilde{O}, \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_4\}$ обозначает ортонормированный репер $\tilde{\mathfrak{R}}$ в R_4^+, а x^1, x^2, x^3, x^4 — координаты вектора относительно этого репера.

Ортонормированные координатные системы в R_4^+ характеризуются тем, что скалярный квадрат вектора $\mathbf{x}$ имеет вид

$$\mathbf{x}^2 = x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2} + x^{4^2}.$$

К пространству R_4^+ мы вернемся в § 58, а на протяжении этого параграфа мы будем вести подготовительные построения в четырехмерном комплексном аффинном пространстве A_4^+, рассматриваемом параллельно с R_4^+. Прежде всего в пространстве A_4^+ мы зададим раз навсегда начало O и пару двумерных плоскостей A_2, $\hat{A}_2$, проходящих через O и не имеющих общих направлений.

Аффинный репер в A_4^+ мы условимся выбирать всегда так, чтобы начало его лежало в O, первые два вектора $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ принадлежали плоскости A_2, а последние два, которые мы будем обозначать $\mathbf{e}_{\hat{1}}$, $\mathbf{e}_{\hat{2}}$, — плоскости $\hat{A}_2$.

Таким образом, из одного репера $\mathfrak{R}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_{\hat{1}}, \mathbf{e}_{\hat{2}}\}$ любой другой будет получаться преобразованием

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_{1'} &= \alpha_{1'}^1 \mathbf{e}_1 + \alpha_{1'}^2 \mathbf{e}_2, & \mathbf{e}_{\hat{1}'} &= \alpha_{\hat{1}'}^{\hat{1}} \mathbf{e}_{\hat{1}} + \alpha_{\hat{1}'}^{\hat{2}} \mathbf{e}_{\hat{2}}, \\ \mathbf{e}_{2'} &= \alpha_{2'}^1 \mathbf{e}_1 + \alpha_{2'}^2 \mathbf{e}_2, & \mathbf{e}_{\hat{2}'} &= \alpha_{\hat{2}'}^{\hat{1}} \mathbf{e}_{\hat{1}} + \alpha_{\hat{2}'}^{\hat{2}} \mathbf{e}_{\hat{2}}, \end{aligned}\right\} \qquad (57.1)$$

так как $\mathbf{e}_{1'}$, $\mathbf{e}_{2'}$ остаются в плоскости A_2, а $\mathbf{e}_{\hat{1}'}$, $\mathbf{e}_{\hat{2}'}$ — в плоскости $\hat{A}_2$.

Мы условимся (до конца главы), что греческие индексы будут пробегать у нас значения 1, 2. Тогда (57.1) можно записать кратко:

$$\mathbf{e}_{\lambda'} = \alpha_{\lambda'}^{\lambda} \mathbf{e}_{\lambda}, \qquad \mathbf{e}_{\hat{\lambda}'} = \alpha_{\hat{\lambda}'}^{\hat{\lambda}} \mathbf{e}_{\hat{\lambda}}. \qquad (57.2)$$

*) Она изложена в статье автора «Теория спиноров», УМН, X, вып. 2 (64) (1955).