случай играет роль в физике; во-вторых, он допускает элементарное изложение, в то время как для общего случая потребовалось бы развивать довольно обширную теорию*). Для сокращения изложения мы будем вынуждены отказаться от наводящих соображений и прямо показать, как строятся спиноры и спинтензоры.

§ 57*. Спинорное пространство

Мы построим теорию спиноров сначала в *комплексном* четырехмерном евклидовом пространстве R_4^+. Пусть $\{\tilde{O}, \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_4\}$ обозначает ортонормированный репер $\tilde{\mathfrak{R}}$ в R_4^+, а x^1, x^2, x^3, x^4 — координаты вектора относительно этого репера.

Ортонормированные координатные системы в R_4^+ характеризуются тем, что скалярный квадрат вектора $\mathbf{x}$ имеет вид

$$\mathbf{x}^2 = x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2} + x^{4^2}.$$

К пространству R_4^+ мы вернемся в § 58, а на протяжении этого параграфа мы будем вести подготовительные построения в четырехмерном комплексном аффинном пространстве A_4^+, рассматриваемом параллельно с R_4^+. Прежде всего в пространстве A_4^+ мы зададим раз навсегда начало O и пару двумерных плоскостей A_2, $\hat{A}_2$, проходящих через O и не имеющих общих направлений.

Аффинный репер в A_4^+ мы условимся выбирать всегда так, чтобы начало его лежало в O, первые два вектора $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ принадлежали плоскости A_2, а последние два, которые мы будем обозначать $\mathbf{e}_{\hat{1}}$, $\mathbf{e}_{\hat{2}}$, — плоскости $\hat{A}_2$.

Таким образом, из одного репера $\mathfrak{R}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_{\hat{1}}, \mathbf{e}_{\hat{2}}\}$ любой другой будет получаться преобразованием

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_{1'} &= \alpha_{1'}^{1}\mathbf{e}_1 + \alpha_{1'}^{2}\mathbf{e}_2, & \mathbf{e}_{\hat{1}'} &= \alpha_{\hat{1}'}^{\hat{1}}\mathbf{e}_{\hat{1}} + \alpha_{\hat{1}'}^{\hat{2}}\mathbf{e}_{\hat{2}}, \\ \mathbf{e}_{2'} &= \alpha_{2'}^{1}\mathbf{e}_1 + \alpha_{2'}^{2}\mathbf{e}_2, & \mathbf{e}_{\hat{2}'} &= \alpha_{\hat{2}'}^{\hat{1}}\mathbf{e}_{\hat{1}} + \alpha_{\hat{2}'}^{\hat{2}}\mathbf{e}_{\hat{2}}, \end{aligned}\right\} \qquad (57.1)$$

так как $\mathbf{e}_{1'}$, $\mathbf{e}_{2'}$ остаются в плоскости A_2, а $\mathbf{e}_{\hat{1}'}$, $\mathbf{e}_{\hat{2}'}$ — в плоскости $\hat{A}_2$.

Мы условимся (до конца главы), что греческие индексы будут пробегать у нас значения 1, 2. Тогда (57.1) можно записать кратко:

$$\mathbf{e}_{\lambda'} = \alpha_{\lambda'}^{\lambda}\mathbf{e}_{\lambda}, \qquad \mathbf{e}_{\hat{\lambda}'} = \alpha_{\hat{\lambda}'}^{\hat{\lambda}}\mathbf{e}_{\hat{\lambda}}. \qquad (57.2)$$

*) Она изложена в статье автора «Теория спиноров», УМН, X, вып. 2 (64) (1955).

Однако мы наложим еще ограничение на выбор допустимых реперов: все они должны получаться друг из друга при помощи *унимодулярных* преобразований как над $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, так и над $\mathbf{e}_{\hat{1}}$, $\mathbf{e}_{\hat{2}}$. Унимодулярными мы называем линейные преобразования с определителем 1, так что в нашем случае:

$$\operatorname{Det}\left|\alpha^{\lambda}_{\lambda'}\right| = \begin{vmatrix} \alpha^1_{1'} & \alpha^2_{1'} \\ \alpha^1_{2'} & \alpha^2_{2'} \end{vmatrix} = 1, \qquad \operatorname{Det}\left|\alpha^{\hat{\lambda}}_{\hat{\lambda}'}\right| = \begin{vmatrix} \alpha^{\hat{1}}_{\hat{1}'} & \alpha^{\hat{2}}_{\hat{1}'} \\ \alpha^{\hat{1}}_{\hat{2}'} & \alpha^{\hat{2}}_{\hat{2}'} \end{vmatrix} = 1. \quad (57.3)$$

Так как унимодулярные линейные преобразования образуют группу, то достаточно потребовать, чтобы все рассматриваемые реперы получались унимодулярными преобразованиями в смысле (57.3) из одного начального; тогда унимодулярность автоматически имеет место и при переходе от любого репера к любому.

Итак, в A_4^+ мы рассматриваем совокупность аффинных реперов, которая замкнута относительно всевозможных преобразований (57.1), *удовлетворяющих условию* (57.3), *причем любые два репера совокупности получаются друг из друга преобразованием этого вида.* Если не считать условий (57.3), то в остальном $\alpha^{\lambda}_{\lambda'}$, $\alpha^{\hat{\lambda}}_{\hat{\lambda}'}$ — произвольные комплексные числа. Между собой матрицы $\left\|\alpha^{\lambda}_{\lambda'}\right\|$, $\left\|\alpha^{\hat{\lambda}}_{\hat{\lambda}'}\right\|$ ничем не связаны.

Реперы этой совокупности мы будем называть *спинреперами*. Мы условимся относить векторы ψ пространства A_4^+ исключительно к тому или иному спинреперу. Координаты ψ относительно спинрепера мы будем обозначать ψ^1, ψ^2, $\psi^{\hat{1}}$, $\psi^{\hat{2}}$, так что $\psi = \psi^1\mathbf{e}_1 + \psi^2\mathbf{e}_2 + \psi^{\hat{1}}\mathbf{e}_{\hat{1}} + \psi^{\hat{2}}\mathbf{e}_{\hat{2}}$. Так как согласно (57.2) $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ преобразуются между собой и $\mathbf{e}_{\hat{1}}$, $\mathbf{e}_{\hat{2}}$ — между собой, то, очевидно, ψ^1, ψ^2 и $\psi^{\hat{1}}$, $\psi^{\hat{2}}$ преобразуются тоже по отдельности при помощи транспонированных обратных матриц:

$$\psi^{\lambda'} = \alpha^{\lambda'}_{\lambda}\psi^{\lambda}, \qquad \psi^{\hat{\lambda}'} = \alpha^{\hat{\lambda}'}_{\hat{\lambda}}\psi^{\hat{\lambda}}, \quad (57.4)$$

где

$$\alpha^{\lambda}_{\mu'}\alpha^{\mu'}_{\nu} = \delta^{\lambda}_{\nu}, \qquad \alpha^{\hat{\lambda}}_{\hat{\mu}'}\alpha^{\hat{\mu}'}_{\hat{\nu}} = \delta^{\hat{\lambda}}_{\hat{\nu}}. \quad (57.5)$$

Если учесть, что $\alpha^{\lambda}_{\lambda'}$ — унимодулярная матрица, то легко подсчитать, воспользовавшись уравнениями (57.5), ее обратную матрицу:

$$\begin{Vmatrix} \alpha^{1'}_{1} & \alpha^{1'}_{2} \\ \alpha^{2'}_{1} & \alpha^{2'}_{2} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha^2_{2'} & -\alpha^1_{2'} \\ -\alpha^2_{1'} & \alpha^1_{1'} \end{Vmatrix}. \quad (57.6)$$

Разумеется, $\alpha_{\lambda}^{\lambda'}$ — тоже унимодулярная матрица. Аналогичные соотношения имеют место и в случае индексов с крышками. Преобразования вида (57.4) с произвольными унимодулярными матрицами $\alpha_{\lambda}^{\lambda'}$, $\alpha_{\hat{\lambda}}^{\hat{\lambda}'}$ образуют группу, которую мы будем называть *спинорной группой*.

Так как спинреперы есть частный случай аффинных реперов, то относительно спинреперов можно рассматривать тензоры совершенно так же, как относительно аффинных реперов вообще. Мы уже рассмотрели *один раз контравариантный спинтензор* $(\psi^{\lambda}, \psi^{\hat{\lambda}})$, образованный координатами вектора ψ. Этот тензор будем называть *спинором* (с контравариантными координатами). Аналогичным образом можно строить и любые многовалентные тензоры, которые мы будем называть *спинтензорами*. При этом каждый индекс пробегает значения 1, 2, $\hat{1}$, $\hat{2}$. В отличие от обычной тензорной алгебры разница между контра- и ковариантными индексами будет здесь мало существенной: из контравариантного спинтензора $(\psi^{\lambda}, \psi^{\hat{\lambda}})$ всегда можно получить ковариантный, положив

$$\psi_1, \psi_2, \psi_{\hat{1}}, \psi_{\hat{2}} = \psi^2, -\psi^1, \psi^{\hat{2}}, -\psi^{\hat{1}}. \qquad (57.7)$$

Действительно, элементарный подсчет показывает, что когда $(\psi^{\lambda}, \psi^{\hat{\lambda}})$ преобразуются по закону (57.4), полученные из них таким образом $(\psi_{\lambda}, \psi_{\hat{\lambda}})$ преобразуются по закону (57.2):

$$\psi_{\lambda'} = \alpha_{\lambda'}^{\lambda}\psi_{\lambda}, \qquad \psi_{\hat{\lambda}'} = \alpha_{\hat{\lambda}'}^{\hat{\lambda}}\psi_{\hat{\lambda}}. \qquad (57.8)$$

В самом деле, если в (57.4) выразить ψ^{λ}, $\psi^{\hat{\lambda}}$ через ψ_{λ}, $\psi_{\hat{\lambda}}$ согласно (57.7), то, учитывая (57.6), приходим к соотношениям (57.8). Ковариантный спинтензор ψ_{λ}, $\psi_{\hat{\lambda}}$ мы также будем кратко называть спинором (с ковариантными координатами).

Аналогично (57.7) можно «переделывать» любой индекс спинтензора из контравариантного в ковариантный, и наоборот. Этой переделке можно придать инвариантную форму следующим образом. Дважды контравариантный спинтензор имеет, вообще говоря, координаты вида

$$c^{\lambda\mu}, \quad c^{\hat{\lambda}\mu}, \quad c^{\lambda\hat{\mu}}, \quad c^{\hat{\lambda}\hat{\mu}}.$$

Рассмотрим спинтензор этого вида с такими свойствами:

$$\varepsilon^{\lambda\mu} = -\varepsilon^{\mu\lambda}, \qquad \varepsilon^{\hat{\lambda}\hat{\mu}} = -\varepsilon^{\hat{\mu}\hat{\lambda}}, \qquad \varepsilon^{\lambda\hat{\mu}} = \varepsilon^{\hat{\lambda}\mu} = 0. \qquad (57.9)$$

Другими словами, этот спинтензор кососимметричен по всем индексам, причем координаты со смешанными индексами все равны нулю.

Ввиду того, что индексы 1, 2 участвуют в спинтензорном преобразовании отдельно и индексы $\hat{1}$, $\hat{2}$ тоже отдельно (согласно (57.4)), то условия (57.9) носят инвариантный характер. Кроме того, значение координаты ε^{12} является инвариантом. Действительно, мы знаем, что в двумерном случае единственная существенная координата ε^{12} кососимметрического тензора $\varepsilon^{\lambda\mu}$ является относительным инвариантом и при преобразовании умножается на $\operatorname{Det}|A_\lambda^{\lambda'}|$ (см. (35.6) при $n=2$). Но в нашем случае матрица $A_\lambda^{\lambda'}=\alpha_\lambda^{\lambda'}$ унимодулярная, так что ε^{12} будет просто инвариантом. То же справедливо, конечно, и для $\varepsilon^{\hat{1}\hat{2}}$.

Выберем спинтензор (57.9) так, чтобы $\varepsilon^{12}=\varepsilon^{\hat{1}\hat{2}}=1$. Итак, все координаты нашего спинтензора равны нулю кроме

$$\varepsilon^{12}=-\varepsilon^{21}=1, \qquad \varepsilon^{\hat{1}\hat{2}}=-\varepsilon^{\hat{2}\hat{1}}=1, \tag{57.10}$$

и это имеет место относительно любого спинрепера.

Совершенно аналогично строим дважды ковариантный спинтензор со всеми теми же свойствами:

$$\varepsilon_{12}=-\varepsilon_{21}=1, \qquad \varepsilon_{\hat{1}\hat{2}}=-\varepsilon_{\hat{2}\hat{1}}=1, \tag{57.11}$$

причем остальные координаты равны нулю.

Теперь соотношение (57.7) можно записать при помощи свертывания с тензором $\varepsilon_{\lambda\mu}$ следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \psi_\lambda &= \varepsilon_{\lambda\mu}\psi^\mu, & \psi_{\hat{\lambda}} &= \varepsilon_{\hat{\lambda}\hat{\mu}}\psi^{\hat{\mu}}, \\ \psi^\lambda &= -\varepsilon^{\lambda\mu}\psi_\mu, & \psi^{\hat{\lambda}} &= -\varepsilon^{\hat{\lambda}\hat{\mu}}\psi_{\hat{\mu}}. \end{aligned}\right\} \tag{57.12}$$

Непосредственно проверкой убеждаемся, что и в первой, и во второй строчках повторяются формулы (57.7). Инвариантный характер этих формул виден из инвариантности тензорной операции свертывания. Правда, при этом, например, в первой формуле индекс суммирования μ должен был бы пробегать значения не только 1, 2, но и $\hat{1}$, $\hat{2}$, но фактически это является лишним, так как $\varepsilon_{\lambda\hat{\mu}}$ все равно дают нуль. Это же замечание относится и к остальным формулам.

При помощи (57.12) можно «поднимать» и «опускать» любой индекс у спинтензора наподобие того, как мы это делали в евклидовом пространстве.

Рассмотрим теперь другой частный случай дважды контравариантного спинтензора, когда

$$c^{\lambda\mu}=c^{\hat{\lambda}\hat{\mu}}=0, \qquad c^{\lambda\hat{\mu}}=c^{\hat{\mu}\lambda}. \tag{57.13}$$

Из закона преобразования верхних индексов (57.4), в силу которого значения 1, 2 участвуют в преобразовании по отдельности от $\hat{1}$, $\hat{2}$, видно, что условие $c^{\lambda\mu}=0$ носит инвариантный характер; то же относится к условию $c^{\hat{\lambda}\hat{\mu}}=0$. Оставшееся условие означает, что наш тензор симметричен. Матрица его координат имеет вид

$$\left\|\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{0} & c^{1\hat{1}} & c^{1\hat{2}} \\ & & c^{2\hat{1}} & c^{2\hat{2}} \\ \hline c^{\hat{1}1} & c^{\hat{1}2} & \multicolumn{2}{c}{0} \\ c^{\hat{2}1} & c^{\hat{2}2} & & \end{array}\right\|.$$

В дальнейшем спинтензор этого вида мы будем называть кратко «спинтензор $c^{\lambda\hat{\mu}}$». Ясно, что здесь речь идет не о единственном спинтензоре, как в случае $\varepsilon^{\lambda\mu}$, $\varepsilon^{\hat{\lambda}\hat{\mu}}$, а о целом их классе. В силу симметрии тензора достаточно рассматривать одну из выписанных здесь матриц 2-го порядка, например, верхнюю; другая получается из нее транспонированием. Закон преобразования будет иметь вид

$$c^{\lambda'\hat{\mu}'}=\alpha_{\lambda}^{\lambda'}\alpha_{\hat{\mu}}^{\hat{\mu}'}c^{\lambda\hat{\mu}}. \tag{57.14}$$

Здесь по общему соглашению индекс суммирования λ пробегает значения 1, 2 и аналогично $\hat{\mu}$ — значения $\hat{1}$, $\hat{2}$; для каждого индекса мы повторяем здесь закон преобразования (57.4). Правда, по общей схеме тензорного преобразования индекс λ должен бы был пробежать все четыре значения, т. е. еще $\hat{1}$, $\hat{2}$; но соответствующие дополнительные члены все равно обращаются в нуль, так как в (57.4) следует считать $\alpha_{\hat{\lambda}}^{\lambda'}=0$ ($\psi^{1'}$, $\psi^{2'}$ разлагаются только по ψ^1, ψ^2 без участия $\psi^{\hat{1}}$, $\psi^{\hat{2}}$). Аналогичное замечание относится, конечно, и к индексу $\hat{\mu}$.

Формулу (57.14) можно истолковать так, что матрица $c^{\lambda'\hat{\mu}'}$ получается последовательным перемножением матриц $\alpha_{\lambda}^{\lambda'}$, $c^{\lambda\hat{\mu}}$, $\alpha_{\hat{\mu}}^{\hat{\mu}'}$, считая *номером строки* у первой матрицы верхний индекс, у второй — первый индекс, у третьей — нижний индекс. При перемножении матриц их определители тоже перемножаются. Учитывая унимодулярность матриц $\alpha_{\lambda}^{\lambda'}$, $\alpha_{\hat{\mu}}^{\hat{\mu}'}$, получаем:

$$\operatorname{Det}|c^{\lambda'\hat{\mu}'}|=\operatorname{Det}|c^{\lambda\hat{\mu}}|. \tag{57.15}$$

Следовательно, наш спинтензор обладает инвариантом

$$I=\operatorname{Det}|c^{\lambda\mu}|=c^{1\hat{1}}c^{2\hat{2}}-c^{1\hat{2}}c^{2\hat{1}}. \tag{57.16}$$