§ 58*. Спиноры в четырехмерном комплексном евклидовом пространстве R_4^+

С каждым спинтензором вида $c^{\lambda\hat{\mu}}$ мы свяжем определенные линейные комбинации его координат:

$$\left.\begin{aligned} x^1 &= \frac{1}{2}(c^{1\hat{2}} + c^{2\hat{1}}), & x^2 &= \frac{1}{2i}(c^{1\hat{2}} - c^{2\hat{1}}), \\ x^3 &= \frac{1}{2}(c^{1\hat{1}} - c^{2\hat{2}}), & x^4 &= \frac{1}{2i}(c^{1\hat{1}} + c^{2\hat{2}}). \end{aligned}\right\} \tag{58.1}$$

Обратно, координаты $c^{\lambda\hat{\mu}}$ без труда выражаются через эти линейные комбинации:

$$\begin{Vmatrix} c^{1\hat{1}} & c^{1\hat{2}} \\ c^{2\hat{1}} & c^{2\hat{2}} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x^3 + ix^4 & x^1 + ix^2 \\ x^1 - ix^2 & -x^3 + ix^4 \end{Vmatrix}, \tag{58.2}$$

так что x^1, x^2, x^3, x^4 можно, если угодно, рассматривать как видоизмененную форму координат спинтензора $c^{\lambda\hat{\mu}}$.

Очевидно, инвариант I (57.16) принимает при этом вид

$$I = -({x^1}^2 + {x^2}^2 + {x^3}^2 + {x^4}^2). \tag{58.3}$$

Когда в результате преобразования спинрепера $c^{\lambda\hat{\mu}}$ преобразуются как координаты спинтензора, их линейные комбинации x^i испытывают линейное преобразование, сохраняющее сумму их квадратов, т. е. (комплексное) *ортогональное преобразование*.

Если мы истолкуем x^i как ортонормированные координаты в некотором R_4^+, то оказывается, что каждое преобразование спинрепера в A_4^+ влечет за собой вполне определенное преобразование ортонормированных координат в R_4^+. Очевидно, что при этом наложению спинорных преобразований (57.4) отвечает наложение соответствующих ортогональных преобразований и тождественному спинорному преобразованию отвечает тождественное ортогональное преобразование в R_4^+. Кроме того, очевидно, что матрица ортогонального преобразования непрерывно зависит от матрицы преобразования (57.4). Другими словами, спинорная группа в A_4^+ получает представление в группе ортогональных преобразований в R_4^+. Обозначим это представление φ.

Спинорная группа (57.4) будет связной, так как непрерывным изменением $\alpha_\lambda^{\lambda'}$ (и аналогично $\alpha_{\hat{\lambda}}^{\hat{\lambda}'}$), начиная от единичной матрицы

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \tag{*}$$

и соблюдая условие унимодулярности, можно перейти к любой наперед заданной унимодулярной матрице (например, если $\alpha_1^{1'} \neq 0$, то можно непрерывно менять $\alpha_1^{1'}$, $\alpha_2^{1'}$, $\alpha_1^{2'}$ от начальных значений (*) до конечных, избегая для $\alpha_1^{1'}$ значения 0 и определяя каждый момент значение $\alpha_2^{2'}$ из условия унимодулярности).

Поэтому и в представлении φ мы получим лишь те ортогональные преобразования, которые можно достичь непрерывным переходом по ортогональной группе, начиная с тождественного преобразования; такими будут лишь собственно ортогональные преобразования (т. е. преобразования с определителем $+1$).

Заранее не ясно, дает ли представление φ *все* такие преобразования; однако это так, что мы докажем немного позже.

Очень важно, что в представлении φ спинорная группа, как говорят, дважды накрывает собственно ортогональную группу. Действительно, если все коэффициенты спинорного преобразования (57.4) умножить на -1 (условие унимодулярности при этом не нарушается!), то, очевидно, закон преобразования для $c^{\lambda\hat{\mu}}$ не меняется, а значит, и матрица ортогонального преобразования для x^i остается прежней.

Итак, два спинорных преобразования (57.4), *отличающихся лишь множителем* -1, *будут представлены одной и той же ортогональной матрицей.*

Заметим, что еще какого-нибудь третьего спинорного преобразования, дающего ту же ортогональную матрицу, не существует. Действительно, данная ортогональная матрица вполне определяет преобразование над x^i, а потому и над соответствующими $c^{\lambda\hat{\mu}}$. Следовательно, в преобразовании (57.14)

$$c^{\lambda'\hat{\mu}'} = \alpha_\lambda^{\lambda'} \alpha_{\hat{\mu}}^{\hat{\mu}'} c^{\lambda\hat{\mu}} \tag{58.4}$$

вполне определены все коэффициенты $\alpha_\lambda^{\lambda'} \alpha_{\hat{\mu}}^{\hat{\mu}'}$. Учитывая это, попробуем все же изменить матрицы $\alpha_\lambda^{\lambda'}$, $\alpha_{\hat{\mu}}^{\hat{\mu}'}$; тогда умножение какого-нибудь из элементов $\alpha_\lambda^{\lambda'}$ (в предположении, что он не равен 0) на какое-нибудь число $k \neq 0$ повлечет за собой умножение на k^{-1} всех элементов матрицы $\alpha_{\hat{\mu}}^{\hat{\mu}'}$, а следовательно, умножение ее определителя на k^{-2}. Но так как матрица должна остаться унимодулярной, то $k^{-2} = 1$, $k = \pm 1$. Следовательно, у нас есть лишь один способ изменить матрицу $\alpha_{\hat{\mu}}^{\hat{\mu}'}$: умножить ее на -1; конечно, $\alpha_\lambda^{\lambda'}$ при этом тоже приходится умножить на -1, чтобы сохранить коэффициенты в (58.4). Мы возвращаемся к уже рассмотренному случаю.

Расширим теперь спинорную группу (57.4) так, чтобы в представлении φ она порождала не только собственные, но и несобственные ортогональные преобразования в R_4^+.

А именно, кроме спинреперов $\mathfrak{R}$, описанных в начале § 57, мы будем допускать и такие $\mathfrak{R}\{e_1, e_2, e_{\hat{1}}, e_{\hat{2}}\}$, которые отличаются от прежних переименованием e_1, e_2 в $e_{\hat{1}}, e_{\hat{2}}$, и наоборот, так что у них e_1, e_2 будут лежать в $\hat{A}_2$, а $e_{\hat{1}}, e_{\hat{2}}$ — в A_2. Другими словами, к преобразованиям (57.1) мы присоединяем преобразование

$$e_{1'} = e_{\hat{1}}, \quad e_{2'} = e_{\hat{2}}, \quad e_{\hat{1}'} = e_1, \quad e_{\hat{2}'} = e_2, \tag{58.5}$$

а также преобразования, полученные наложением этого преобразования на преобразования (57.1):

$$\left.\begin{aligned} e_{1'} &= \alpha_{1'}^{\hat{1}} e_{\hat{1}} + \alpha_{1'}^{\hat{2}} e_{\hat{2}}, & e_{\hat{1}'} &= \alpha_{\hat{1}'}^{1} e_1 + \alpha_{\hat{1}'}^{2} e_2; \\ e_{2'} &= \alpha_{2'}^{\hat{1}} e_{\hat{1}} + \alpha_{2'}^{\hat{2}} e_{\hat{2}}, & e_{\hat{2}'} &= \alpha_{\hat{2}'}^{1} e_1 + \alpha_{\hat{2}'}^{2} e_2. \end{aligned}\right\} \tag{58.6}$$

Мы изменили здесь обозначения коэффициентов по сравнению с (57.1), но обе матрицы 2-го порядка остались по существу прежними, т. е. произвольными унимодулярными матрицами. То же самое в краткой записи:

$$e_{\lambda'} = \alpha_{\lambda'}^{\hat{\mu}} e_{\hat{\mu}}, \qquad e_{\hat{\mu}'} = \alpha_{\hat{\mu}'}^{\lambda} e_{\lambda}. \tag{58.7}$$

Координаты спинора преобразуются при этом с помощью транспонированных обратных матриц:

$$\psi^{\lambda'} = \alpha_{\hat{\mu}}^{\lambda'} \psi^{\hat{\mu}}, \qquad \psi^{\hat{\mu}'} = \alpha_{\lambda}^{\hat{\mu}'} \psi^{\lambda}. \tag{58.8}$$

Под спинорной группой мы будем теперь понимать группу, состоящую как из преобразований (57.4), *так и из* (58.8).

Эта расширенная спинорная группа будет, очевидно, несвязной, так как переход от старых преобразований к новым связан с перескакиванием векторов e_1, e_2 со своей плоскости A_2 на плоскость $\hat{A}_2$ (аналогично и для $e_{\hat{1}}, e_{\hat{2}}$) и непрерывным путем осуществлен быть не может.

Покажем теперь, что спинорная группа в представлении φ покрывает (дважды) всю ортогональную группу в R_4^+ («старые» спинорные преобразования порождают собственные ортогональные матрицы, а «новые» — несобственные).

Так как любые ортогональные преобразования в R_4^+ (и вообще в R_n^+) можно осуществить наложением некоторого числа зеркальных отражений, то достаточно доказать, что в представлении φ появляется любое зеркальное отражение. Рассмотрим преобразование тензора (57.13), отвечающее спинорному преобразованию (58.8):

$$c^{\lambda'\hat{\mu}'} \left(= c^{\hat{\mu}'\lambda'}\right) = \alpha_{\lambda}^{\hat{\mu}'} \alpha_{\hat{\mu}}^{\lambda'} c^{\lambda\hat{\mu}}. \tag{58.9}$$

В частности, если взять преобразование (58.5), то обе матрицы $\alpha_{\lambda}^{\hat{\mu}'}$, $\alpha_{\hat{\mu}}^{\lambda'}$ будут единичными, и мы получим:

$$'c^{\lambda\hat{\mu}} = c^{\mu\hat{\lambda}}.$$

Здесь штрих поставлен при c, так как штрихование индексов в этом частном случае неудобно.

Итак, спинорному преобразованию (58.5) отвечает транспонирование тензора $c^{\mu\hat{\lambda}}$ в клетке 2-го порядка (58.2), а это равносильно зеркальному отражению $x^2 \to -x^2$ при неизменных x^1, x^3, x^4.

Теперь ясно, что новые спинорные преобразования (полученные наложением преобразования (58.5) на старые спинорные преобразования) дают в представлении φ несобственные ортогональные преобразования (полученные наложением зеркального отражения $x^2 \to -x^2$ на какие-то собственные ортогональные преобразования). Требуется доказать, что этим путем получатся, в частности, все зеркальные отражения в R_4^+.

Для этой цели возьмем произвольную комплексную унимодулярную матрицу 2-го порядка M; дальше она остается фиксированной.

Рассмотрим специальное спинорное преобразование вида (58.8), положив

$$\left\| \alpha_{\lambda}^{\hat{\mu}'} \right\| = M, \qquad \left\| \alpha_{\hat{\mu}}^{\lambda'} \right\| = M^{-1}. \tag{58.10}$$

Тогда преобразование (58.9) над произвольным спинтензором $c^{\lambda\hat{\mu}}$ можно переписать в матричной форме:

$$\left\| c^{\lambda'\hat{\mu}'} \right\|^{T} = M \cdot \left\| c^{\lambda\hat{\mu}} \right\| \cdot (M^{-1})^{T}, \tag{58.11}$$

где T обозначает транспонирование матрицы. Очевидно,

$$\left(M \cdot \left\| c^{\lambda'\hat{\mu}'} \right\|\right)^{T} = \left\| c^{\lambda'\hat{\mu}'} \right\|^{T} \cdot M^{T} = M \cdot \left\| c^{\lambda\hat{\mu}} \right\|,$$

в последнем равенстве использовано (58.11).

Отсюда видно, что матрица $M \cdot \left\| c^{\lambda\hat{\mu}} \right\|$ при преобразовании (58.11) переходит в транспонированную матрицу; в частности, она не меняется, если была симметричной, и умножается на -1 в случае кососимметричности.

Комплексные матрицы 2-го порядка $M \cdot \left\| c^{\lambda\hat{\mu}} \right\|$ при фиксированной M и всевозможных $\left\| c^{\lambda\hat{\mu}} \right\|$ образуют четырехмерное комплексное линейное пространство, причем симметрические из них образуют трехмерное подпространство, а кососимметрические — прямую (одномерное подпространство). Тем самым и среди тензоров $c^{\lambda\hat{\mu}}$ найдется трехмерное подпространство тензоров, инвариантных при (58. 11), и одномерное подпространство тензоров, умножающихся на -1. Это означает, что ортогональное преобразование над x^i, которое порождается спинорным преобразованием (58.10), оставляет в R_4^+ неподвижной некоторую трехмерную плоскость R_3^+, «перепрокидывая» некоторую прямую R_1^+. *Итак, спинорное преобразование вида* (58.10) *порождает в* R_4^+ *зеркальное отражение относительно некоторой (тем самым неизотропной) плоскости* R_3^+.

Остается показать, что этим путем можно получить всевозможные зеркальные отражения в R_4^+. Зададимся произвольно неизотропным вектором $\mathbf{x} \in R_4^+$ или, что то же, невырожденной матрицей $c^{\lambda\hat{\mu}}$ (ср. (58.3)). Подходящим выбором унимодулярной матрицы M всегда можно добиться, чтобы $M\|c^{\lambda\hat{\mu}}\|$ оказалось кососимметрической матрицей; тем самым тензор $c^{\lambda\hat{\mu}}$, а вместе с ним и вектор $\mathbf{x}$ умножаются на -1 при спинорном преобразовании (58.11), и порождаемое им отражение в R_4^+ идет в направлении наперед заданного вектора $\mathbf{x}$.

Вместе со всевозможными отражениями расширенная спинорная группа порождает в R_4^+ все вращения, собственные и несобственные, т. е. все ортогональные матрицы, и наше утверждение доказано.

При этом группа ортогональных матриц покрывается дважды: каждой ортогональной матрице отвечают ровно два спинорных преобразования, отличающихся друг от друга множителем -1. (Это можно показать так же, как и в случае спинорных преобразований (57.4).)

Но каждое спинорное преобразование (вида (57.4) или (58.8)) влечет за собой соответствующее преобразование каждого спинтензора. В итоге ортогональному преобразованию ортонормированного репера в R_4^+ отвечает некоторое преобразование каждого спинтензора и *спинтензоры можно рассматривать как центроевклидовы объекты* в R_4^+: для одного ортонормированного репера координаты спинтензора, в частности спинора ψ^λ, $\psi^{\hat{\lambda}}$, можно выбрать произвольно; любой другой ортонормированный репер получается из данного определенным ортогональным преобразованием, соответственно которому и пересчитываются координаты спинтензора. Так как наложению спинорных преобразований отвечает наложение соответствующих ортогональных преобразований, то указанное правило преобразования координат спинтензора действует и при переходе от любого ортонормированного репера к любому другому.

Здесь необходимо сделать важное уточнение: так как ортогональное преобразование определяет соответствующее спинорное преобразование с точностью до множителя -1, то правило преобразования координат спинтензора будет вполне определенным лишь для спинтензоров четной валентности. Действительно, в этом случае в тензорный закон преобразования элементы матрицы спинорного преобразования входят множителями четное число раз. В случае же спинтензоров нечетной валентности, в частности спинора, тензорный закон преобразования будет определен с точностью до множителя -1, а потому и спинтензоры нечетной валентности, в частности спиноры, в качестве центроевклидовых объектов имеет смысл задавать лишь с точностью до множителя -1 (т. е. с точностью до одновременного умножения всех координат спинтензора на -1).

Таким образом, спинтензоры нечетной валентности оказываются двузначными центроевклидовыми объектами. Это новые объекты, конечно, не сводящиеся просто к тензорам. Зато спинтензоры четной валентности задаются однозначно и по существу не дают ничего нового по сравнению с тензорами: всякий спинтензор четной валентности после подходящего линейного преобразования его координат с постоянными коэффициентами превращается в некоторый тензор в R_4^+, и этим путем можно получить любой тензор в R_4^+. Это последнее утверждение доказать нетрудно. Сначала вспомним, что один раз контравариантный тензор x^i можно согласно (58.1) свести к спинтензору $c^{\lambda\hat{\mu}}=c^{\hat{\mu}\lambda}$, $c^{\lambda\mu}=c^{\hat{\lambda}\hat{\mu}}=0$. Характерно, что одновалентный тензор эквивалентен двухвалентному спинтензору, так что спинор ψ^{λ}, $\psi^{\hat{\mu}}$ нужно расценивать как нечто вроде «полувалентного» тензора.

Аналогичным образом любой m-валентный тензор $V^{i_1 i_2 \ldots i_m}$ в R_4^+ можно свести к $2m$-валентному спинтензору $c^{\lambda_1\hat{\mu}_1, \lambda_2\hat{\mu}_2, \ldots, \lambda_m\hat{\mu}_m}$ с симметрией индексов внутри каждой пары (при этом предполагается, что однотипность индексов в какой-либо паре влечет обращение координаты в нуль). Для этого достаточно каждый из индексов $i_1, \ldots$ переделать в пару спинорных индексов $\lambda_1\hat{\mu}_1, \ldots$ по схеме (58.1), (58.2).

§ 59*. Спиноры в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве индекса 1

Построив спиноры и спинтензоры в *комплексном* четырехмерном евклидовом пространстве R_4^+, мы уже почти автоматически получаем их и для *вещественных* четырехмерных евклидовых пространств. При этом мы ограничимся пространством $R_4^{(1)}$ индекса 1, имеющим особое значение для физики; но и в остальных случаях можно поступать аналогично.

Зададимся каким-либо определенным $R_4^{(1)}$, выделенным в R_4^+ (см. § 53). Для этого достаточно взять ортонормированный