образование с точностью до множителя $-1$, то правило преобразования координат спинтензора будет вполне определенным лишь для спинтензоров четной валентности. Действительно, в этом случае в тензорный закон преобразования элементы матрицы спинорного преобразования входят множителями четное число раз. В случае же спинтензоров нечетной валентности, в частности спинора, тензорный закон преобразования будет определен с точностью до множителя $-1$, а потому и спинтензоры нечетной валентности, в частности спиноры, в качестве центроевклидовых объектов имеет смысл задавать лишь с точностью до множителя $-1$ (т. е. с точностью до одновременного умножения всех координат спинтензора на $-1$).

Таким образом, спинтензоры нечетной валентности оказываются двузначными центроевклидовыми объектами. Это новые объекты, конечно, не сводящиеся просто к тензорам. Зато спинтензоры четной валентности задаются однозначно и по существу не дают ничего нового по сравнению с тензорами: всякий спинтензор четной валентности после подходящего линейного преобразования его координат с постоянными коэффициентами превращается в некоторый тензор в $R_4^+$, и этим путем можно получить любой тензор в $R_4^+$. Это последнее утверждение доказать нетрудно. Сначала вспомним, что один раз контравариантный тензор $x^i$ можно согласно (58.1) свести к спинтензору $c^{\lambda\hat{\mu}} = c^{\hat{\mu}\lambda}$, $c^{\lambda\mu} = c^{\hat{\lambda}\hat{\mu}} = 0$. Характерно, что одновалентный тензор эквивалентен двухвалентному спинтензору, так что спинор $\psi^\lambda$, $\psi^{\hat{\mu}}$ нужно расценивать как нечто вроде «полувалентного» тензора.

Аналогичным образом любой $m$-валентный тензор $V^{i_1 i_2 \dots i_m}$ в $R_4^+$ можно свести к $2m$-валентному спинтензору $c^{\lambda_1\hat{\mu}_1, \lambda_2\hat{\mu}_2, \dots, \lambda_m\hat{\mu}_m}$ с симметрией индексов внутри каждой пары (при этом предполагается, что однотипность индексов в какой-либо паре влечет обращение координаты в нуль). Для этого достаточно каждый из индексов $i_1, \dots$ переделать в пару спинорных индексов $\lambda_1\hat{\mu}_1, \dots$ по схеме (58.1), (58.2).

## § 59*. Спиноры в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве индекса 1

Построив спиноры и спинтензоры в *комплексном* четырехмерном евклидовом пространстве $R_4^+$, мы уже почти автоматически получаем их и для *вещественных* четырехмерных евклидовых пространств. При этом мы ограничимся пространством $R_4^{(1)}$ индекса 1, имеющим особое значение для физики; но и в остальных случаях можно поступать аналогично.

Зададимся каким-либо определенным $R_4^{(1)}$, выделенным в $R_4^+$ (см. § 53). Для этого достаточно взять ортонормированный репер в $R_4^+$

$$\{O,\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_4\} \tag{59.1}$$

и переделать его в репер

$$\{O,\ \mathbf{e}_0,\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}, \tag{59.2}$$

где

$$\mathbf{e}_0 = i\mathbf{e}_4, \tag{59.3}$$

а в остальном все осталось без изменения. Тогда пространство $R_4^{(1)}$ мы определим как множество точек, координаты которых $x^0$, $x^1$, $x^2$, $x^3$ относительно репера (59.2) являются *вещественными*, а следовательно, относительно репера (59.1) имеют вид

$$x^1 = x^1,\quad x^2 = x^2,\quad x^3 = x^3,\quad x^4 = ix^0. \tag{59.4}$$

Так как

$$\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = 1,\quad \mathbf{e}_0^2 = -1,$$

то репер (59.2) служит ортонормированным репером в $R_4^{(1)}$.

Из всевозможных (комплексных) ортогональных преобразований репера (59.1) мы в этом параграфе будем рассматривать лишь те, которые переводят $R_4^{(1)}$ в себя, т. е. оставляют вещественными $x^1$, $x^2$, $x^3$ и чисто мнимой $x^4$. Такие ортогональные преобразования в $R_4^+$ образуют группу, которую мы будем обозначать $\tilde{O}$. Они, очевидно, означают всевозможные псевдоортогональные преобразования репера (59.2) в $R_4^{(1)}$.

Ограничивая ортогональную группу в $R_4^+$ до группы $\tilde{O}$, мы соответственно сузим группу спинорных преобразований (57.4), (58.8) так, чтобы в представлении $\varphi$ получались все ортогональные преобразования только лишь из группы $\tilde{O}$. Мы покажем, что для этого в случае (57.4) нужно наложить добавочно или условие комплексной сопряженности двух унимодулярных матриц, которые до сих пор были совершенно произвольными:

$$\alpha_{\hat{\mu}}^{\hat{\mu}'} = (\alpha_{\mu}^{\mu'})^*, \tag{59.5}$$

или условие их комплексной антисопряженности:

$$\alpha_{\hat{\mu}}^{\hat{\mu}'} = -(\alpha_{\mu}^{\mu'})^*. \tag{59.6}$$

Одна из двух матриц остается при этом произвольной комплексной унимодулярной матрицей. Звездочкой мы обозначаем переход к комплексно сопряженной величине.

Аналогичные условия накладываются и в случае (58.8): или

$$\alpha_{\hat{\mu}}^{\mu} = (\alpha_{\mu}^{\hat{\mu}'})^*, \tag{59.7}$$

или

$$\alpha_{\hat{\mu}}^{\mu'} = -(\alpha_{\mu}^{\hat{\mu}'})^{*}. \tag{59.8}$$

Мы должны показать, что спинорные преобразования вида (59.5), (59.6), (59.7), (59.8) порождают в $R_4^{(1)}$ всевозможные вращения соответственно собственные и несобственные 3-го, 1-го, 2-го рода.

Переходим к доказательству. Если вектор **x** принадлежит $R_4^{(1)}$, то соответствующий спинтензор $c^{\lambda\hat{\mu}}$ будет эрмитовым (т. е. его матрица комплексно сопряжена транспонированной матрице). Это сразу видно из (58.2), если учесть, что $x^1$, $x^2$, $x^3$ — вещественные, а $x^4$ — чисто мнимая координата. Как видно из (58.1), верно и обратное, так что *для того, чтобы вектор* **x** *принадлежал* $R_4^{(1)}$, *необходимо и достаточно, чтобы соответствующий спинтензор* $c^{\lambda\hat{\mu}}$ *был эрмитовым:*

$$(c^{\lambda\hat{\mu}})^{*} = c^{\mu\hat{\lambda}}. \tag{59.9}$$

Какое бы из спинорных преобразований (59.5) — (59.8) ни применить к эрмитову спинтензору $c^{\lambda\hat{\mu}}$, он остается эрмитовым, так как его индексы преобразуются при помощи комплексно сопряженных матриц (в случаях (59.6), (59.8) — с добавочным умножением на $-1$, что не нарушает эрмитовости). Действительно, в случаях (59.5) или (59.6)

$$c^{\lambda'\hat{\mu}'} = \alpha_{\lambda}^{\lambda'}\alpha_{\hat{\mu}}^{\hat{\mu}'}c^{\lambda\hat{\mu}}$$

(ср. (57.14)); отсюда

$$(c^{\lambda'\hat{\mu}'})^{*} = (\alpha_{\lambda}^{\lambda'})^{*}(\alpha_{\hat{\mu}}^{\hat{\mu}'})^{*}(c^{\lambda\hat{\mu}})^{*} = \alpha_{\hat{\lambda}}^{\hat{\lambda}'}\alpha_{\mu}^{\mu'}c^{\mu\hat{\lambda}} = c^{\mu'\hat{\lambda}'}.$$

Это показывает, что эрмитовость спинтензора (59.9) сохраняется и после преобразования. Аналогично обстоит дело и в случаях (59.7), (59.8).

Но раз спинтензор $c^{\lambda\hat{\mu}}$ остается эрмитовым после преобразований (59.5) — (59.8), то соответствующий ему вектор $x$ остается в пространстве $R_4^{(1)}$ после вращений, порожденных этими преобразованиями.

*Итак, спинорным преобразованиям вида* (59.5) — (59.8) *отвечают в* $R_4^{+}$ *вращения, переводящие* $R_4^{(1)}$ *в себя, т. е. ортогональные преобразования группы* $\tilde{O}$.

Остается показать, что этим путем мы получим *всю* группу $\tilde{O}$. Покажем прежде всего, что спинорные преобразования вида (59.7) и (59.8) порождают, в частности, все зеркальные отражения в $R_4^{(1)}$. Пусть **x** — произвольный единичный или мнимоединичный вектор из $R_4^{(1)}$; ему отвечает согласно (58.2) спинтензор $c^{\lambda\hat{\mu}}$. Как следует из (58.3),

$$\operatorname{Det}|c^{\lambda\hat{\mu}}| = \begin{cases} +1, & \text{если } \mathbf{x} \text{ — мнимоединичный}, \\ -1, & \text{если } \mathbf{x} \text{ — единичный}. \end{cases} \tag{59.10}$$

Подберем матрицу 2-го порядка $M$ так, чтобы

$$\left.\begin{aligned} M\cdot\|c^{\lambda\hat{\mu}}\| &= \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} \quad \text{в первом случае}, \\ M\cdot\|c^{\lambda\hat{\mu}}\| &= \begin{Vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{Vmatrix} \quad \text{во втором случае}. \end{aligned}\right\} \tag{59.11}$$

Переходя от матриц к их определителям, замечаем, что матрица $M$ в обоих случаях унимодулярна. Спинорное преобразование, построенное согласно (58.10), порождает в $R_4^+$, как мы знаем, зеркальное отражение в направлении вектора $\mathbf{x}$. Это отражение, в частности, переводит $R_4^{(1)}$ в себя, так как вектор $\mathbf{x}$ принадлежит $R_4^{(1)}$.

Остается показать, что в нашем случае спинорное преобразование с матрицами (58.10) удовлетворяет или условию (59.8) (в первом случае), или условию (59.7) (во втором случае), т. е. что

$$\left.\begin{aligned} M^{-1} &= -M^* \quad \text{в первом случае}, \\ M^{-1} &= M^* \quad \text{во втором случае}. \end{aligned}\right\} \tag{59.12}$$

Любая матрица 2-го порядка $C$, как легко проверить, удовлетворяет равенству

$$C^T\cdot\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} = \operatorname{Det} C\cdot\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}\cdot C^{-1}. \tag{59.13}$$

Положим $C = \|c^{\lambda\hat{\mu}}\|$ и, пользуясь (59.10), а также эрмитовостью $C$, получим в первом случае:

$$C^*\cdot\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} C^{-1}.$$

Это означает, что $-M^{*-1} = M$, так как согласно (59.11) (в первом случае):

$$M = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}\cdot C^{-1}, \quad M^{*-1} = -C^*\cdot\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Итак, выполняется первое из условий (59.12).

Во втором случае получаем из (59.13):

$$C^*\cdot\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} = -\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}\cdot C^{-1},$$

что означает $M^{*-1} = M$, так как согласно (59.11) (во втором случае)

$$M = i \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot C^{-1}, \quad M^{*-1} = -iC^{*} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Мы видим, что выполняется второе из условий (59.12).

*Итак, спинорное преобразование* (58.10) *с матрицей* $M$, *построенной согласно* (59.11), *порождает в* $R_4^{(1)}$ *зеркальное отражение в направлении любого наперед заданного неизотропного вектора* $\mathbf{x}$, *причем выполняется условие* (59.12), *т. е. наше спинорное преобразование будет вида* (59.8), *когда отражение 2-го рода, и* (59.7), *когда — 1-го рода.*

Так как спинорные преобразования вида (59.5)—(59.8) очевидным образом составляют *группу* преобразований и наложением зеркальных отражений в $R_4^{(1)}$ (как ранее в $R_4^{+}$) можно получить любое вращение, то *спинорные преобразования вида* (59.5)—(59.8) *порождают в* $R_4^{(1)}$ *всевозможные вращения* (*т. е. всю группу* $\tilde{O}$).

В $R_4^{(1)}$ можно рассматривать спинтензоры подобно тому, как это делалось в $R_4^{+}$; при этом мы ограничиваемся вращениями ортонормированного репера в $R_4^{(1)}$, т. е. группой $\tilde{O}$ и соответственно спинорными преобразованиями только вида (59.5)—(59.8)*).

## § 60*. Спинорное поле и инвариантная дифференциальная операция $D^{\lambda\hat{\mu}}$

Пусть в $R_4^{(1)}$ задано спинорное поле. Это значит, что спинор $\psi_\lambda$, $\psi_{\hat{\lambda}}$ задан в каждой точке пространства (или некоторой его области), так что

$$\left.\begin{aligned} \psi_\lambda &= \psi_\lambda(x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (\lambda = 1, 2); \\ \psi_{\hat{\lambda}} &= \psi_{\hat{\lambda}}(x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (\hat{\lambda} = \hat{1}, \hat{2}). \end{aligned}\right\} \tag{60.1}$$

Мы предпочли здесь опустить индексы у координат спинора, хотя принципиального значения это и не имеет.

Каждому вектору $x^i$ в $R_4^{(1)}$ отвечает согласно (58.2) определенный спинтензор $c^{\lambda\hat{\mu}}$. Переписывая (58.2), мы предпочтем воспользоваться ковариантными координатами $x_i$, а они в $R_4^{(1)}$ имеют вид

$$x_0 = -x^0, \quad x_1 = x^1, \quad x_2 = x^2, \quad x_3 = x^3.$$

---

*) Подробное рассмотрение этих вопросов (хотя и под иным углом зрения) можно найти в книгах: М. А. Наймарк, Линейные представления группы Лоренца, М., Физматгиз, 1958; И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро, Представления группы вращений и группы Лоренца, М., Физматгиз, 1958.