что означает $M^{*-1} = M$, так как согласно (59.11) (во втором случае)

$$M = i \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \right\| \cdot C^{-1}, \quad M^{*-1} = -iC^{*} \cdot \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \right\| .$$

Мы видим, что выполняется второе из условий (59.12).

Итак, спинорное преобразование (58.10) *с матрицей* M, *построенной согласно* (59.11), *порождает в* $R_4^{(1)}$ *зеркальное отражение в направлении любого наперед заданного неизотропного вектора* $\mathbf{x}$, *причем выполняется условие* (59.12), *т. е. наше спинорное преобразование будет вида* (59.8), *когда отражение 2-го рода, и* (59.7), *когда — 1-го рода.*

Так как спинорные преобразования вида (59.5)—(59.8) очевидным образом составляют *группу* преобразований и наложением зеркальных отражений в $R_4^{(1)}$ (как ранее в R_4^{+}) можно получить любое вращение, то *спинорные преобразования вида* (59.5)—(59.8) *порождают в* $R_4^{(1)}$ *всевозможные вращения* (*т. е. всю группу* $\tilde{O}$).

В $R_4^{(1)}$ можно рассматривать спинтензоры подобно тому, как это делалось в R_4^{+}; при этом мы ограничиваемся вращениями ортонормированного репера в $R_4^{(1)}$, т. е. группой $\tilde{O}$ и соответственно спинорными преобразованиями только вида (59.5)—(59.8)*).

§ 60*. Спинорное поле и инвариантная дифференциальная операция $D^{\lambda\hat{\mu}}$

Пусть в $R_4^{(1)}$ задано спинорное поле. Это значит, что спинор ψ_λ, $\psi_{\hat{\lambda}}$ задан в каждой точке пространства (или некоторой его области), так что

$$\left. \begin{aligned} \psi_\lambda &= \psi_\lambda (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (\lambda = 1, 2); \\ \psi_{\hat{\lambda}} &= \psi_{\hat{\lambda}} (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (\hat{\lambda} = \hat{1}, \hat{2}). \end{aligned} \right\} \tag{60.1}$$

Мы предпочли здесь опустить индексы у координат спинора, хотя принципиального значения это и не имеет.

Каждому вектору x^i в $R_4^{(1)}$ отвечает согласно (58.2) определенный спинтензор $c^{\lambda\hat{\mu}}$. Переписывая (58.2), мы предпочтем воспользоваться ковариантными координатами x_i, а они в $R_4^{(1)}$ имеют вид

$$x_0 = -x^0, \quad x_1 = x^1, \quad x_2 = x^2, \quad x_3 = x^3.$$

---

*) Подробное рассмотрение этих вопросов (хотя и под иным углом зрения) можно найти в книгах: М. А. Наймарк, Линейные представления группы Лоренца, М., Физматгиз, 1958; И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро, Представления группы вращений и группы Лоренца, М., Физматгиз, 1958.

Мы получаем:

$$\left\| \begin{matrix} c^{1\hat{1}} & c^{1\hat{2}} \\ c^{2\hat{1}} & c^{2\hat{2}} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} x_3 + x_0 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & -x_3 + x_0 \end{matrix} \right\|, \tag{60.2}$$

так как $x^4 = ix^0 = -ix_0$. Все эти соотношения носят инвариантный характер и, записанные в одном ортонормированном репере, будут справедливы и в любом другом.

Рассмотрим теперь совокупность операторов частного дифференцирования по координатам точки:

$$\frac{\partial}{\partial x^0}, \quad \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad \frac{\partial}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x^3}, \tag{60.3}$$

которые можно применять к различным функциям точки в нашем пространстве, в частности, к тензорным и спинорным полям в нем. При переходе к другому реперу меняются координаты точек, меняются и операторы (60.3), причем *они ведут себя как ковариантные координаты вектора*. Действительно, по формуле дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^i} = A^i_{i'} \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{60.4}$$

Формулу (60.4), как и последующие операторные формулы, нужно понимать в том смысле, что мы получим верное равенство, подействовав операторами в левой и в правой частях на произвольную (дифференцируемую, конечно) функцию точки $f(x^0, x^1, x^2, x^3)$. Формула (60.4) означает, что совокупность операторов (60.3) можно рассматривать как *одноковариантный тензор с операторными координатами*. Формальные выкладки, для которых играет роль лишь закон преобразования, остаются справедливыми и для таких тензоров. Но для перелицовки одноковариантного тензора x_i в спинтензор $c^{\lambda\hat{\mu}}$ как раз играет роль лишь закон преобразования x_i. Поэтому *тензор с операторными координатами можно аналогичным образом перелицевать по формуле* (60.2) *в спинтензор, конечно, тоже с операторными координатами*. Обозначая координаты этого спинтензора $D^{\lambda\hat{\mu}} = D^{\hat{\mu}\lambda}$, получаем

$$\left\| \begin{matrix} D^{1\hat{1}} & D^{1\hat{2}} \\ D^{2\hat{1}} & D^{2\hat{2}} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x^0} & \frac{\partial}{\partial x^1} + i\frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x^1} - i\frac{\partial}{\partial x^2} & -\frac{\partial}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x^0} \end{matrix} \right\|. \tag{60.5}$$

При этом мы будем считать (как и для спинтензора $c^{\lambda\hat{\mu}}$), что $D^{\lambda\mu} = D^{\hat{\lambda}\hat{\mu}} = 0$. Важность этого операторного спинтензора заключается в том, что он позволяет получать *инвариантные дифференциальные зависимости между спинорными полями*.

Свертывая произвольный спинтензор $c^{\lambda\hat{\mu}}=c^{\hat{\mu}\lambda}$ с произвольным спинором ψ_λ, $\psi_{\hat{\lambda}}$, мы всегда получаем новый спинор $\tilde{\psi}^\lambda$, $\tilde{\psi}^{\hat{\lambda}}$:

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\psi}^\lambda &= c^{\lambda\hat{\mu}}\psi_{\hat{\mu}},\\ \tilde{\psi}^{\hat{\lambda}} &= c^{\hat{\lambda}\mu}\psi_\mu.\end{aligned}\right\} \tag{60.6}$$

Соотношения эти носят строго инвариантный характер, так как с точки зрения спинрепера мы имеем здесь тензорную операцию свертывания. Заметим, что в каждой формуле индекс суммирования в принципе пробегает все четыре значения: 1, 2, $\hat{1}$, $\hat{2}$, но фактически в первой формуле берутся значения $\hat{1}$, $\hat{2}$, а во второй — 1, 2, так как у нас предполагается $c^{\lambda\mu}=c^{\hat{\lambda}\hat{\mu}}=0$. В частности, если свернуть спинтензор с операторными координатами (60.5) со спинором поля (60.1), то в результате получается опять некоторый спинор:

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\psi}^\lambda &= D^{\lambda\hat{\mu}}\psi_{\hat{\mu}},\\ \tilde{\psi}^{\hat{\lambda}} &= D^{\hat{\lambda}\mu}\psi_\mu.\end{aligned}\right\} \tag{60.7}$$

Здесь под умножением $D^{\lambda\hat{\mu}}$ на $\psi_{\hat{\mu}}$ и т. п. нужно понимать воздействие оператора $D^{\lambda\hat{\mu}}$ на функцию $\psi_{\hat{\mu}}(x^0, x^1, x^2, x^3)$. Спинор $\tilde{\psi}^\lambda$, $\tilde{\psi}^{\hat{\lambda}}$ будет, очевидно, также функцией точки и дает новое спинорное поле. Инвариантность соотношений (60.7) вытекает из их тензорной структуры, с формальной стороны совершенно такой же, как и у (60.6), хотя по существу смысл формул (60.7), конечно, иной.

Развернем формулы (60.7), причем вторую из них берем в виде $\tilde{\psi}^{\hat{\lambda}}=D^{\mu\hat{\lambda}}\psi_\mu$, пользуясь равенством $D^{\hat{\lambda}\mu}=D^{\mu\hat{\lambda}}$. Получим:

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{\psi}^1 &= D^{1\hat{1}}\psi_{\hat{1}}+D^{1\hat{2}}\psi_{\hat{2}} = \frac{\partial\psi_{\hat{1}}}{\partial x^3}+\frac{\partial\psi_{\hat{1}}}{\partial x^0}+\frac{\partial\psi_{\hat{2}}}{\partial x^1}+i\,\frac{\partial\psi_{\hat{2}}}{\partial x^2},\\
\tilde{\psi}^2 &= D^{2\hat{1}}\psi_{\hat{1}}+D^{2\hat{2}}\psi_{\hat{2}} = \frac{\partial\psi_{\hat{1}}}{\partial x^1}-i\,\frac{\partial\psi_{\hat{1}}}{\partial x^2}-\frac{\partial\psi_{\hat{2}}}{\partial x^3}+\frac{\partial\psi_{\hat{2}}}{\partial x^0},\\
\tilde{\psi}^{\hat{1}} &= D^{\hat{1}1}\psi_1+D^{\hat{2}1}\psi_2 = \frac{\partial\psi_1}{\partial x^3}+\frac{\partial\psi_1}{\partial x^0}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x^1}-i\,\frac{\partial\psi_2}{\partial x^2},\\
\tilde{\psi}^{\hat{2}} &= D^{\hat{1}2}\psi_1+D^{\hat{2}2}\psi_2 = \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+i\,\frac{\partial\psi_1}{\partial x^2}-\frac{\partial\psi_2}{\partial x^3}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x^0}.
\end{aligned}\right\} \tag{60.8}$$

Таким образом, при помощи дифференциальной операции (60.8) из спинорного поля ψ_λ, $\psi_{\hat{\lambda}}$ инвариантным образом возникает новое спинорное поле $\tilde{\psi}^\lambda$, $\tilde{\psi}^{\hat{\lambda}}$.