

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ  
ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ**

Теория относительности возникла в результате длительного накопления опытного материала, приведшего к глубокому преобразованию наших физических представлений о формах материи и движения. После целого ряда попыток приспособить прежние понятия о пространстве, времени и других физических величинах к вновь открытым опытным фактам обнаружилось, что для этой цели требуется перестроить все эти понятия коренным образом. Эта задача была выполнена в основном А. Эйнштейном в 1905 г. (специальная теория относительности) и в 1915 г. (общая теория относительности). Впрочем, задача была выполнена лишь в том смысле, что было дано стройное формально-математическое описание нового положения вещей. Задача глубокого, подлинно физического обоснования этой математической схемы все еще стоит перед физикой.

Мы имеем здесь в виду, что теория относительности является в основном макроскопической теорией и в этом отношении (в отличие от квантовой механики) продолжает традицию классической физики. Между тем трудно сомневаться в том, что макроскопические понятия, в том числе и наши пространственно-временные представления, на самом деле уходят своими корнями в микромир. Когда-нибудь они должны быть раскрыты как некоторый статистический итог, вытекающий из закономерностей этого мира — далеко еще не разгаданных — при суммарном наблюдении огромного числа микроявлений.

По характеру этой книги основы теории относительности будут даны именно с их математической стороны в готовой, законченной форме. В частности, поучительная история накопления опытного материала, подталкивавшего шаг за шагом к созданию теории относительности, почти полностью выпадает из рамок нашего изложения. Мы говорим об этом для того, чтобы у читателя не создалось впечатления, что теория относительности была кем-то выдумана «из головы» сразу в том виде, как она будет изложена. В действительности

это математическое оформление теории появилось лишь как итог долгих экспериментальных и теоретических поисков.

Из двух частей, составляющих теорию относительности (специальная и общая теория относительности), мы будем заниматься в этой главе только первой. Математический аппарат специальной теории относительности сводится к теории тензорных полей в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве индекса 1. Между тем общая теория относительности требует более квалифицированного математического аппарата, который будет подготовлен нами лишь в последующих главах.

Значение двух частей теории относительности в современной физике не соответствует их названиям. Специальная теория относительности пронизывает собой в сущности всю современную физику, во всяком случае, когда речь идет о больших скоростях движения тел (при малых скоростях она дает практически те же результаты, что и классическая механика). Выводы специальной теории относительности, означающие огромный переворот в наших представлениях о пространстве—времени, а в связи с этим и о других физических величинах, всесторонне подтверждаются опытом.

В противоположность этому общая теория относительности, представляя собой с математической точки зрения широкое обобщение специальной теории, создана для объяснения лишь одного физического явления—явления всемирного тяготения. Опытные данные, подтверждающие ее выводы (в тех случаях, когда она заметно отклоняется от теории Ньютона), сравнительно немногочисленны и требуют весьма тонких измерений, часто лежащих на пределе доступной в настоящее время точности. В связи с этим будет разумным рассматривать общую теорию относительности в ее современном математическом оформлении скорее как эскиз теории, чем как установленную истину. Вместе с тем трудно подвергать сомнению ее основные идеи: зависимость между геометрическими свойствами пространства-времени и распределением и движением масс и вытекающее отсюда объяснение явлений тяготения. Но вполне возможно, что математическое оформление этих идей еще не окончательное.

От подлинного содержания общей теории относительности следует отличать связанный с нею большой поток исследований, не имеющих серьезного физического обоснования и представляющих собой лишь математические спекуляции на ее темы.

## § 61. Постановка задачи

В дальнейшем у нас будет играть важную роль понятие системы отсчета. Систему отсчета можно наивно представлять себе в виде подвижной «платформы» (т. е. некоторой системы неизменно скрепленных между собой твердых тел), на которой установлены

движущиеся вместе с ней измерительные приборы — часы, эталоны длины и т. д., позволяющие производить измерения различных величин, как мы будем говорить, относительно данной системы отсчета.

В частности, можно «установить» прямоугольные координатные оси  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , твердо связанные с данной системой отсчета, и отмечать координаты точек, в которых совершаются те или иные события. Можно также при помощи часов, движущихся вместе с системой отсчета, отмечать моменты совершения этих событий, отсчитывая время  $t$  от некоторого произвольно выбранного начального момента. При этом подразумевается, что все системы отсчета снабжены совершенно одинаковыми часами и эталонами длины.

В дальнейшем мы всегда будем считать, что с системой отсчета неизменно скреплены каким-либо образом выбранные координатные оси  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  и указан начальный момент для отсчета времени. Таким образом, под системой отсчета мы будем понимать, окончательно, подвижную «платформу» вместе с установленными на ней прямоугольными координатными осями  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  и выбранным начальным моментом для отсчета времени  $t$ .

Если на прежней «платформе» мы установим по-другому координатные оси или изменим начальный момент для отсчета времени, то мы будем считать, что перешли к другой системе отсчета, хотя такое преобразование системы отсчета и будет тривиальным (так мы и будем его в дальнейшем называть).

С классической точки зрения среди систем отсчета существует лишь одна система (если не считать ее тривиальных преобразований), неподвижная в каком-то абсолютном смысле, относительно которой и формулируются законы физики.

Правда, для классической механики с самого начала ее возникновения было известно, что формулировка ее законов несколько не меняется, если покоящуюся систему заменить системой, движущейся относительно нее равномерно и прямолинейно, — такие системы мы будем называть инерциальными. В этом заключается принцип относительности Галилея.

В самом деле, пусть система  $S$  — покоящаяся, а  $S'$  — движущаяся инерциальная система. Предположим для простоты, что координатные оси  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , связанные с  $S$ , и  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$ , связанные с  $S'$ , в начальный момент совпадают, причем ось  $X$  идет по направлению движения системы  $S'$ . Если (постоянную) скорость движения инерциальной системы  $S'$  обозначить через  $v$ , то спустя время  $t$  координатные оси  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$  сдвинутся относительно неподвижных координатных осей  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  на расстояние  $vt$  в направлении оси  $X$ . Поэтому, если в момент  $t$  произойдет какое-либо событие в точке с координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  относительно системы  $S$ , то относительно

системы  $S'$  эта точка будет иметь координаты:

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (61.1)$$

К этому нужно добавить, что с точки зрения классической механики время имеет абсолютный характер, т. е. промежуток времени между двумя событиями имеет всегда одну и ту же величину независимо от того, в какой системе отсчета он измеряется. Поэтому момент совершения данного события будет одинаковым с точки зрения обеих систем отсчета, и к формулам (61.1) можно присоединить еще одну:

$$t' = t. \quad (61.2)$$

Если мы прослеживаем движение материальной точки, так что  $x$ ,  $y$ ,  $z$  являются функциями  $t$  (и аналогично в системе  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  — функциями от  $t'$ ), то из формул (61.1), (61.2) сейчас же вытекает, что

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y'}{dt'^2} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z'}{dt'^2} = \frac{d^2z}{dt^2},$$

т. е. проекции ускорения на оси будут одинаковыми для обеих систем отсчета. Теперь нужно учесть, что в классической динамике рассматривается система материальных точек, ускорения которых пропорциональны действующим на них силам, а силы зависят от взаимного расположения этих точек в каждый данный момент. Но это расположение тоже, очевидно, выглядит одинаково с точки зрения обеих систем, так как *разности* координат любых двух точек  $x_2 - x_1$ ,  $y_2 - y_1$ ,  $z_2 - z_1$  будут при данном  $t$  равны  $x'_2 - x'_1$ ,  $y'_2 - y'_1$ ,  $z'_2 - z'_1$  (как немедленно следует из уравнений (61.1)). Теперь ясно, что уравнения движения запишутся одинаково относительно обеих систем отсчета  $S$  и  $S'$ .

Итак, наблюдая механические явления, мы не в состоянии установить, наблюдаем ли мы их с точки зрения покоящейся или с точки зрения равномерно и прямолинейно движущейся системы. Однако к началу XX века, т. е. к моменту возникновения теории относительности, теоретическая физика состояла не только из механики. Наряду с ней стояла другая, столь же важная теория, созданная в XIX веке, — электродинамика. И вот основные законы электродинамики не удовлетворяли принципу относительности (если руководствоваться «галилеевыми» преобразованиями (61.1), (61.2)). Наиболее выпукло это сказывалось в том известном результате, что скорость света (т. е. скорость распространения электромагнитных волн) в пустоте является постоянной величиной  $c$ . С классической точки зрения было ясно, что этот результат может относиться лишь к покоящейся системе отсчета, так как относительно системы отсчета, движущейся со скоростью  $v$ , скорость света будет  $c - v$ , если свет «догоняет» систему, и  $c + v$ , если он движется ей навстречу. Поэтому,

естественно, считали, что можно обнаружить абсолютную скорость движения данной системы отсчета, наблюдая те отклонения от законов электродинамики, в частности, от закона постоянства скорости света, которые должны обнаружиться в этой системе, если только она не находится в абсолютном покое.

Ряд опытов, поставленных с этой целью (где в качестве движущейся системы отсчета служила Земля в ее движении по орбите), дал отрицательный результат. Оказалось, что движение системы отсчета не нарушает законов электродинамики вопреки тому, что бесспорно следовало из классической теории. Разрешение возникшего таким образом глубокого противоречия было дано специальной теорией относительности, согласно которой *не только законы механики, но и электродинамики тоже, выглядят совершенно одинаково в любой инерциальной системе; в частности, скорость света (в пустоте) постоянна и равна  $c$  в любой инерциальной системе.*

Но если дело обстоит таким образом, то теряет смысл отличать среди инерциальных систем те, которые находятся «в абсолютном покое», от тех, которые «движутся». Раз за понятие абсолютной покоящейся системы отсчета не стоит никакой физической реальности, которая отличала бы ее от остальных инерциальных систем, то это значит, что мы имеем дело с неудачной абстракцией, не оправдавшейся дальнейшим развитием науки. В дальнейшем, рассматривая инерциальные системы, мы будем считать их все равноправными и обладающими движением лишь одна относительно другой (а не абсолютным).

Итак, вместо *одной* привилегированной системы отсчета возникает привилегированный *класс инерциальных систем*, в которых законы физики формулируются одинаково и которые движутся одна относительно другой равномерно и прямолинейно. Этими свойствами класс инерциальных систем и будет описываться в специальной теории относительности (после того, как наша исходная «покоящаяся» система потеряла смысл).

## § 62. Пространство событий

Мы уже указывали на противоречие между опытом, который показал равноправие всех инерциальных систем, и классической теорией, согласно которой законы электродинамики верны лишь в «покоящейся» системе, а в остальных нарушаются. С точки зрения теории относительности это противоречие имеет своим источником в первую очередь *неправильность формул (61.1), (61.2)*, пересчитывающих пространственно-временные координаты события  $x, y, z, t$ , вычисленные относительно одной инерциальной системы  $S$ , на  $x', y', z', t'$ , вычисленные относительно другой инерциальной системы  $S'$  (мы вывели эти формулы, предполагая систему  $S$  покоя-