естественно, считали, что можно обнаружить абсолютную скорость движения данной системы отсчета, наблюдая те отклонения от законов электродинамики, в частности, от закона постоянства скорости света, которые должны обнаружиться в этой системе, если только она не находится в абсолютном покое.

Ряд опытов, поставленных с этой целью (где в качестве движущейся системы отсчета служила Земля в ее движении по орбите), дал отрицательный результат. Оказалось, что движение системы отсчета не нарушает законов электродинамики вопреки тому, что бесспорно следовало из классической теории. Разрешение возникшего таким образом глубокого противоречия было дано специальной теорией относительности, согласно которой *не только законы механики, но и электродинамики тоже, выглядят совершенно одинаково в любой инерциальной системе; в частности, скорость света (в пустоте) постоянна и равна c в любой инерциальной системе.*

Но если дело обстоит таким образом, то теряет смысл отличать среди инерциальных систем те, которые находятся «в абсолютном покое», от тех, которые «движутся». Раз за понятием абсолютно покоящейся системы отсчета не стоит никакой физической реальности, которая отличала бы ее от остальных инерциальных систем, то это значит, что мы имеем дело с неудачной абстракцией, не оправдавшейся дальнейшим развитием науки. В дальнейшем, рассматривая инерциальные системы, мы будем считать их все равноправными и обладающими движением лишь одна относительно другой (а не абсолютным).

Итак, вместо *одной* привилегированной системы отсчета возникает привилегированный *класс инерциальных систем*, в которых законы физики формулируются одинаково и которые движутся одна относительно другой равномерно и прямолинейно. Этими свойствами класс инерциальных систем и будет описываться в специальной теории относительности (после того, как наша исходная «покоящаяся» система потеряла смысл).

§ 62. Пространство событий

Мы уже указывали на противоречие между опытом, который показал равноправие всех инерциальных систем, и классической теорией, согласно которой законы электродинамики верны лишь в «покоящейся» системе, а в остальных нарушаются. С точки зрения теории относительности это противоречие имеет своим источником в первую очередь *неправильность формул* (61.1), (61.2), пересчитывающих пространственно-временные координаты события x, y, z, t, вычисленные относительно одной инерциальной системы S, на x', y', z', t', вычисленные относительно другой инерциальной системы S' (мы вывели эти формулы, предполагая систему S покоящейся, но в них ничего не изменится, если считать S любой инерциальной системой, а S' — движущейся относительно нее со скоростью v в направлении оси X, причем в начальный момент S и S' совпадают). Согласно теории относительности эти формулы должны быть заменены новыми, которые обеспечат инвариантность уже всех физических законов; и в области механики, и в области электродинамики. Само собой ясно, что признание формул (61.1), (61.2) неправильными означает отрицание наших прежних представлений о пространстве и времени, на основании которых эти формулы легко получаются, а замена их новыми означает коренную перестройку этих представлений. В дальнейшем мы все это увидим на конкретных примерах.

Чтобы подойти к установлению новых формул с достаточно широкой точки зрения, мы должны будем рассмотреть *четырехмерное пространство событий*, которое на протяжении всей этой главы будет играть у нас основную роль и в котором будут развертываться все наши построения.

Под *событиями* мы условимся понимать элементарные события, т. е. происходящие в столь малой области пространства и в столь короткий промежуток времени, что, идеализируя положение вещей, их можно считать происходящими в одной точке и мгновенно. Само содержание события нас интересовать не будет, так что в сущности событие в нашем понимании сводится к заданию определенного места (точки) в пространстве в определенный момент времени. Таким образом, наше понятие события примерно в том же смысле представляет собой идеализацию реального физического процесса малой протяженности в пространстве и времени, в каком геометрическое понятие точки — идеализацию реального физического тела малой протяженности в пространстве.

Перед нами стоит задача установления новых формул преобразования, смысл которой можно формулировать так. Одно и то же событие может рассматриваться относительно различных инерциальных систем; рассмотрим какие-нибудь две из них, S и S'. Пусть относительно S событие произошло в точке с координатами x, y, z в момент времени t, а относительно S' в точке с координатами x', y', z' и в момент времени t'. Спрашивается, какова зависимость между координатами события в системе S и системе S' (координатами события мы будем называть числа x, y, z, t).

Прежде всего *мы предполагаем, что эта зависимость будет линейной*, т. е. t', x', y', z' выражаются линейными (вообще говоря, неоднородными) функциями от t, x, y, z.

Действительно, классическая зависимость (61.1), (61.2) является линейной как в том простейшем случае взаимного расположения осей X, Y, Z и X',Y', Z', для которого она у нас выписана, так, конечно, и в самом общем случае. Естественно попытаться решить поставленную нами задачу, видоизменяя коэффициенты этой зависимости, но не отказываясь от ее линейного характера.

Более же глубокая причина заключается в том, что лишь при линейном характере зависимости мы обеспечиваем соблюдение закона инерции в любой инерциальной системе (предполагая, что он соблюдается в одной из них).

Далее, нам нужно обеспечить, чтобы скорость распространения света была с точки зрения любой инерциальной системы одна и та же и равнялась константе c. Точнее говоря, нам нужно потребовать, чтобы *всякий сигнал, распространяющийся в каком-либо направлении со скоростью c относительно одной инерциальной системы, распространялся бы с этой же скоростью c и относительно любой другой инерциальной системы.*

В таком случае, принимая, что свет распространяется в любом направлении со скоростью c относительно хотя бы одной инерциальной системы, мы получим этот же результат и для любой другой инерциальной системы.

Будем рассуждать следующим образом.

Пусть первое событие M состоит в том, что из некоторой точки в некоторый момент времени подается сигнал, а второе событие $\tilde{M}$ — в том, что этот сигнал принимается в какой-то другой точке в другой момент времени. Координаты событий M и $\tilde{M}$ относительно системы S обозначим (t, x, y, z) и $(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, а относительно системы S' — теми же буквами, но со штрихами. Тогда тот факт, что сигнал распространялся со скоростью c, относительно системы S можно записать в виде

$$\sqrt{(\tilde{x}-x)^2+(\tilde{y}-y)^2+(\tilde{z}-z)^2}=c(\tilde{t}-t),$$

т. е. путь, пройденный световым лучом, равен протекшему времени, умноженному на c. Возводя почленно в квадрат и перенося все члены налево, получим:

$$-(c\tilde{t}-ct)^2+(\tilde{x}-x)^2+(\tilde{y}-y)^2+(\tilde{z}-z)^2=0. \qquad (62.1)$$

Тот же самый факт, записанный с точки зрения системы S', приводит к аналогичному соотношению:

$$-(c\tilde{t}'-ct')^2+(\tilde{x}'-x')^2+(\tilde{y}'-y')^2+(\tilde{z}'-z')^2=0. \qquad (62.2)$$

Мы требуем, чтобы из того, что сигнал распространяется со скоростью c относительно одной инерциальной системы, следовала бы такая же скорость его распространения и относительно любой другой инерциальной системы. Другими словами, из соотношения (62.1) должно следовать (62.2), и обратно.

Однако мы потребуем еще большего, а именно, чтобы *для любых двух событий M, $\tilde{M}$* выражения, стоящие в левых частях равенств (62.1), (62.2), всегда были бы равны между собой:

$$-(c\tilde{t}-ct)^2+(\tilde{x}-x)^2+(\tilde{y}-y)^2+(\tilde{z}-z)^2\equiv$$
$$\equiv-(c\tilde{t}'-ct')^2+(\tilde{x}'-x')^2+(\tilde{y}'-y')^2+(\tilde{z}'-z')^2. \quad (62.3)$$

Ясно, что если это требование соблюдается, то из (62.1), т. е. из обращения в нуль левой части (62.3), вытекает (62.2), т. е. обращение в нуль правой части (62.3) (равно как и обратно). Однако мы требуем соблюдения (62.3) и в тех случаях, когда его правая и левая части в нуль не обращаются, что, конечно, означает дополнительное предположение. Мы как будто произвольно усилили наши требования, но дело в том, что иначе мы пришли бы к физически нелепым выводам, которые все равно вынудили бы нас сделать дополнительные предположения.

Итак, окончательно: *линейная зависимость* t', x', y', z' *от* t, x, y, z *при переходе от одной инерциальной системы к другой должна быть такова, чтобы для любых двух событий соблюдалось равенство* (62.3).

Теперь нетрудно установить связь с предшествующей математической теорией, именно с геометрией четырехмерного псевдоевклидова пространства индекса 1 (§ 48). В ортонормированной координатной системе x^0, x^1, x^2, x^3 скалярный квадрат вектора выражается в этом пространстве формулой

$$\mathbf{x}^2=-x^{0^2}+x^{1^2}+x^{2^2}+x^{3^2},$$

в частности, скалярный квадрат вектора $\overrightarrow{M\tilde{M}}$, «соединяющего» две какие-нибудь точки $M(x^i)$, $\tilde{M}(\tilde{x}^i)$, имеет вид

$$\overrightarrow{M\tilde{M}}^2=-(\tilde{x}^0-x^0)^2+(\tilde{x}^1-x^1)^2+(\tilde{x}^2-x^2)^2+(\tilde{x}^3-x^3)^2. \quad (62.4)$$

Выберем какую-нибудь инерциальную систему S, и пусть t, x, y, z будут координаты событий с точки зрения S.

Выберем в нашем псевдоевклидовом пространстве какую-нибудь *ортонормированную* координатную систему x^0, x^1, x^2, x^3.

Условимся изображать каждое событие $M(t, x, y, z)$ точкой $M(x^0, x^1, x^2, x^3)$ в псевдоевклидовом пространстве таким образом, чтобы

$$x^0=ct,\quad x^1=x,\quad x^2=y,\quad x^3=z. \quad (62.5)$$

В результате пространство событий взаимно однозначно отобразится на наше псевдоевклидово пространство.

Допустим теперь, что события мы отнесли к другой инерциальной системе S'. Теперь каждое событие M имеет координаты

(t', x', y', z'). Но мы *уже поставили* в соответствие каждому событию M точку M псевдоевклидова пространства. Припишем этой точке следующие координаты (не предрешая вопроса о их характере с точки зрения псевдоевклидова пространства):

$$x^{0'} = ct', \qquad x^{1'} = x', \qquad x^{2'} = y', \qquad x^{3'} = z'. \tag{62.6}$$

Мы утверждаем, что координаты $x^{i'}$ будут тоже ортонормированными, В самом деле, так как t', x', y', z' линейно зависят от t, x, y, z, то координаты $x^{i'}$ линейно зависят от координат x^i. А так как эти последние — ортонормированные аффинные координаты, то $x^{i'}$ *тоже будут аффинными координатами.* Но, кроме того, для любых двух событий выполняется соотношение (62.3). Это соотношение можно переписать для соответствующих точек псевдоевклидова пространства следующим образом (пользуясь (62.5), (62.6)):

$$\begin{aligned} -(\tilde{x}^0 - x^0)^2 + (\tilde{x}^1 - x^1)^2 + (\tilde{x}^2 - x^2)^2 + (\tilde{x}^3 - x^3)^2 &= \\ = -(\tilde{x}^{0'} - x^{0'})^2 + (\tilde{x}^{1'} - x^{1'})^2 + (\tilde{x}^{2'} - x^{2'})^2 &+ (\tilde{x}^{3'} - x^{3'})^2. \end{aligned} \tag{62.7}$$

Так как левая часть выражает скалярный квадрат $\overrightarrow{M\tilde{M}}$ согласно (62.4) (координаты x^i ортонормированные!), то наше равенство можно переписать в виде

$$\overrightarrow{M\tilde{M}}^2 = -(\tilde{x}^{0'} - x^{0'})^2 + (\tilde{x}^{1'} - x^{1'})^2 + (\tilde{x}^{2'} - x^{2'})^2 + (\tilde{x}^{3'} - x^{3'})^2. \tag{62.8}$$

Итак, $x^{i'}$ являются аффинными координатами, в которых скалярный квадрат вектора $\overrightarrow{M\tilde{M}}^2$ выражается формулой (62.8), т. е. приводится к сумме-разности квадратов его координат $\tilde{x}^{i'} - x^{i'}$. Но мы знаем, что скалярный квадрат вектора имеет такое выражение в ортонормированной и *только в ортонормированной* координатной системе псевдоевклидова пространства (§ 42). Следовательно, $x^{i'}$ представляют собой *тоже ортонормированную координатную систему.*

Окончательный результат: *пространство событий можно так взаимно однозначно отобразить на четырехмерное псевдоевклидово пространство индекса* 1, *что координаты событий t, x, y, z, вычисленные с точки зрения любой инерциальной системы S, будут играть роль ортонормированных координат в псевдоевклидовом пространстве (причем t нужно еще умножить на c):*

$$x^0 = ct, \qquad x^1 = x, \qquad x^2 = y, \qquad x^3 = z. \tag{62.9}$$

Тем самым выбор инерциальной системы S в пространстве событий равносилен выбору ортонормированной координатной системы в псевдоевклидовом пространстве, а переход от одной инерциальной системы S к другой S' равносилен переходу от одной ортонормированной координатной системы к другой. Но мы знаем, что этот последний переход совершается при помощи формул

$$x^{i'} = A^{i'}_i x^i + A^{i'}, \tag{62.10}$$

где $A^{i'}_i$ — псевдоортогональная матрица 4-го порядка, индекса 1. Напомним, что это означает, что матрица $A^{i'}_i$ связана со своей обратной матрицей $A^i_{i'}$, как следует из соотношений (50.7), следующим образом:

$$\begin{Vmatrix} A^{0'}_0 & A^{0'}_1 & A^{0'}_2 & A^{0'}_3 \\ A^{1'}_0 & A^{1'}_1 & A^{1'}_2 & A^{1'}_3 \\ A^{2'}_0 & A^{2'}_1 & A^{2'}_2 & A^{2'}_3 \\ A^{3'}_0 & A^{3'}_1 & A^{3'}_2 & A^{3'}_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} A^0_{0'} & -A^1_{0'} & -A^2_{0'} & -A^3_{0'} \\ -A^0_{1'} & A^1_{1'} & A^2_{1'} & A^3_{1'} \\ -A^0_{2'} & A^1_{2'} & A^2_{2'} & A^3_{2'} \\ -A^0_{3'} & A^1_{3'} & A^2_{3'} & A^3_{3'} \end{Vmatrix}. \tag{62.11}$$

Другими словами, данная матрица $A^{i'}_i$ и обратная ей $A^i_{i'}$ совпадают после транспонирования одной из них и умножения первой строки и первого столбца у одной из них на -1. При этом, как мы вскоре увидим, нам придется ограничиться случаем $A^{0'}_0 > 0$ (следовательно, и $A^0_{0'} > 0$).

Так как x^i согласно (62.9) могут служить и координатами событий, то (62.10) дает нам общий вид перехода от одной инерциальной системы к другой. *Этим и решается основная задача, поставленная в этом параграфе.*

В дальнейшем мы всегда будем представлять себе, что пространство событий отображено указанным образом на псевдоевклидово пространство и восприняло его геометрию, причем инерциальные системы отсчета приняли вид ортонормированных координатных систем.

Заметим, что если два события M, $\tilde{M}$ являются одновременными относительно какой-либо системы отсчета S, то в соответствующей ортонормированной системе $\tilde{x}^0 = x^0$ формула (62.4) принимает вид

$$\overrightarrow{M\tilde{M}}^2 = (\tilde{x}^1 - x^1)^2 + (\tilde{x}^2 - x^2)^2 + (\tilde{x}^3 - x^3)^2,$$

и расстояние $M\tilde{M}$ в пространстве событий совпадает с точки зрения системы S с обычным расстоянием между точками, где события произошли.

Если же относительно системы S два события M и $\tilde{M}$ произошли в одной точке,

$$\tilde{x}^1 = x^1, \quad \tilde{x}^2 = x^2, \quad \tilde{x}^3 = x^3,$$

то формула (62.4) дает

$$\overrightarrow{M\tilde{M}}^2 = -(\tilde{x}^0 - x^0)^2,$$

откуда видно, что расстояние $M\tilde{M}$ в пространстве событий будет мнимым и равно $i(\tilde{x}^0 - x^0) = ic(\tilde{t} - t)$, т. е. равно промежутку времени, протекшему между этими событиями, умноженному на ic.

Таким образом, псевдоевклидова метрика в пространстве событий носит универсальный характер и объединяет в себе измерение как пространственных, так и временных расстояний. В первом случае расстояния в этой метрике получаются вещественными, во втором — мнимыми.

§ 63. Формулы Лоренца

Разберемся теперь детально в полученном результате, именно в новых формулах перехода (62.10) от одной инерциальной системы к другой. С геометрической точки зрения речь идет о переходе от одной ортонормированной координатной системы к другой в пространстве событий, т. е. в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве индекса 1. Этот переход изучался нами специально в § 48. Там было выяснено, что, проделав предварительно тривиальные вращения над ортонормированными реперами $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}'$ и параллельный сдвиг одного из них, можно свести преобразование к простому виду (48.10), (48.11):

$$\mathbf{e}_{0'} = \frac{\mathbf{e}_0 + \beta \mathbf{e}_1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathbf{e}_{1'} = \frac{\beta \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathbf{e}_{2'} = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_{3'} = \mathbf{e}_3, \tag{63.1}$$

причем O неподвижно.

Соответствующее преобразование ортонормированных координат x^i будет иметь вид

$$x^{0'} = \frac{x^0 - \beta x^1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x^{1'} = \frac{-\beta x^0 + x^1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x^{2'} = x^2, \quad x^{3'} = x^3 \tag{63.2}$$

(см. переход от преобразования (50.1) к (50.6)). Посмотрим, что означает этот результат с точки зрения пространства событий. Прежде всего параллельный сдвиг репера, например $\mathfrak{R}$, означает, что над ортонормированными координатами x^0, x^1, x^2, x^3 произведено преобразование, заключающееся в добавлении к ним некоторых констант. Но так как координаты x^i имеют теперь в соответствующей инерциальной системе S физический смысл (62.9), то это означает, что некоторые константы добавились к t, x, y, z, т. е. изменен начальный момент отсчета времени и координатные оси X, Y, Z параллельно сдвинуты и укреплены на прежней «платформе» в новом положении. Такое изменение системы отсчета мы относили к числу тривиальных.