то формула (62.4) дает

$$\overrightarrow{M\tilde{M}}^2 = -(\tilde{x}^0 - x^0)^2,$$

откуда видно, что расстояние $M\tilde{M}$ в пространстве событий будет мнимым и равно $i(\tilde{x}^0 - x^0) = ic(\tilde{t} - t)$, т. е. равно промежутку времени, протекшему между этими событиями, умноженному на ic.

Таким образом, псевдоевклидова метрика в пространстве событий носит универсальный характер и объединяет в себе измерение как пространственных, так и временных расстояний. В первом случае расстояния в этой метрике получаются вещественными, во втором — мнимыми.

§ 63. Формулы Лоренца

Разберемся теперь детально в полученном результате, именно в новых формулах перехода (62.10) от одной инерциальной системы к другой. С геометрической точки зрения речь идет о переходе от одной ортонормированной координатной системы к другой в пространстве событий, т. е. в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве индекса 1. Этот переход изучался нами специально в § 48. Там было выяснено, что, проделав предварительно тривиальные вращения над ортонормированными реперами $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}'$ и параллельный сдвиг одного из них, можно свести преобразование к простому виду (48.10), (48.11):

$$\mathbf{e}_{0'} = \frac{\mathbf{e}_0 + \beta \mathbf{e}_1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathbf{e}_{1'} = \frac{\beta \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathbf{e}_{2'} = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_{3'} = \mathbf{e}_3, \tag{63.1}$$

причем O неподвижно.

Соответствующее преобразование ортонормированных координат x^i будет иметь вид

$$x^{0'} = \frac{x^0 - \beta x^1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x^{1'} = \frac{-\beta x^0 + x^1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x^{2'} = x^2, \quad x^{3'} = x^3 \tag{63.2}$$

(см. переход от преобразования (50.1) к (50.6)). Посмотрим, что означает этот результат с точки зрения пространства событий. Прежде всего параллельный сдвиг репера, например $\mathfrak{R}$, означает, что над ортонормированными координатами x^0, x^1, x^2, x^3 произведено преобразование, заключающееся в добавлении к ним некоторых констант. Но так как координаты x^i имеют теперь в соответствующей инерциальной системе S физический смысл (62.9), то это означает, что некоторые константы добавились к t, x, y, z, т. е. изменен начальный момент отсчета времени и координатные оси X, Y, Z параллельно сдвинуты и укреплены на прежней «платформе» в новом положении. Такое изменение системы отсчета мы относили к числу тривиальных.

Далее, тривиальное вращение репера $\mathfrak{R}$ (и аналогично $\mathfrak{R}'$) заключается в том, что вектор $\mathbf{e}_0$ не меняется, а $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ испытывают вращение в своей плоскости, т. е. в трехмерном собственно евклидовом пространстве. Отсюда вытекает, что x^0 не меняется, а x^1, x^2, x^3 подвергаются обычному ортогональному преобразованию. Но, учитывая (62.9), мы видим, что это означает некоторый определенный поворот координатных осей X, Y, Z при прежнем отсчете времени t. Так как коэффициенты ортогонального преобразования константы от времени не зависят, то повернутые оси X, Y, Z твердо расположены относительно прежних осей X, Y, Z и укреплены на той же «платформе». Такое преобразование системы отсчета мы тоже назвали тривиальным.

Итак, за счет тривиального преобразования инерциальных систем отсчета S и S', т. е. сохраняя прежнее движение «платформ» и лишь иначе скрепляя с ними координатные оси X, Y, Z и X', Y' Z', а также, возможно, изменяя начальный момент отсчета времени, можно добиться, чтобы переход от S к S' принял вид (63.2).

Чтобы выпуклее представить этот результат, перепишем формулы (63.2), пользуясь (62.9), в следующем виде:

$$t' = \frac{t - \frac{\beta}{c}x}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x' = \frac{-\beta ct + x}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z. \tag{63.3}$$

Здесь имеется четыре варианта выбора знаков в знаменателях. Однако мы из них оставим лишь один, именно, когда оба знака положительные. В первой формуле мы делаем это на основе физических соображений: если бы знак знаменателя был отрицательным, то возрастание t вызывало бы убывание t' (считая для простоты x, y, z постоянными). Другими словами, наблюдая с точки зрения системы S' существование точки Q (x, y, z), скрепленной с системой S, мы увидели бы все события происходящими в обратной последовательности. Этот физически абсурдный результат заставляет нас отказаться от знака минус в первой формуле (63.3) и, что то же самое, в первой формуле (63.2) и по совершенно аналогичным причинам считать и в общей формуле (62.10) коэффициент $A_0^{0'}$ положительным: $A_0^{0'} > 0$. Заметим, что с точки зрения пространства событий это означает, что переход от одной инерциальной системы к другой не есть любой переход от одного ортонормированного репера к другому. Этот переход представляет собой либо собственное движение, либо несобственное движение 1-го рода (но не 2-го и не 3-го). Соответственно этому инерциальным системам будут отвечать в пространстве событий ортонормированные реперы не всех четырех, а лишь двух классов.

Что же касается случая знака минус в знаменателе второй формулы (63.3), то его устранение не связано с какими-либо принципиальными соображениями и достигается просто изменением положительного направления оси X' на обратное, вследствие чего x' меняет знак. Итак, окончательно формулы (63.3) мы будем писать в виде

$$t' = \frac{t - \frac{\beta}{c} x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x' = \frac{-\beta c t + x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z. \tag{63.4}$$

Таковы формулы перехода от одной инерциальной системы S к другой S' после упрощений, внесенных предварительным тривиальным преобразованием этих систем отсчета. Конечно, нетрудно догадаться, каков настоящий смысл этих тривиальных преобразований: мы так повернули и сдвинули координатные оси, скрепленные с каждой из платформ, и так изменили начальный момент отсчета времени на одной из них, чтобы оси Y, Z системы S в начальный момент $t = 0$ совпадали с осями Y', Z' системы S' в начальный момент $t' = 0$, а последующее движение S' относительно S (равно как и S относительно S') происходило вдоль общей оси X. Однако, если бы мы попытались привести формулы преобразования к упрощенному виду (63.4), исходя непосредственно из этих соображений, то могли бы легко запутаться в новых, еще неизвестных нам, пространственно-временных соотношениях.

Формулы (63.4) *представляют собой аналог формул* (61.1) и (61.2) *и призваны их заменить при переходе от классической точки зрения к релятивистской.* Уже беглое сравнение этих формул показывает глубокую разницу между ними, которая при дальнейшем исследовании станет еще более разительной.

Прежде всего нужно выяснить смысл параметра β, входящего в формулы (63.4). По аналогии с (61.1), (61.2) следует ожидать, что он должен быть связан со скоростью движения v одной инерциальной системы относительно другой, и это действительно оправдывается.

Рассмотрим точку P, закрепленную в системе S'. Ее координаты x', y', z' остаются, следовательно, постоянными; время же t' будем считать переменным, так что мы рассматриваем одну и ту же (с точки зрения системы S') точку P в разные моменты времени t'.

Как будет восприниматься поведение точки P с точки зрения системы S?

Дифференцируя почленно последние три из четырех уравнений (63.4) и учитывая, что в нашем случае $dx' = dy' = dz' = 0$, получаем:

$$0 = \frac{-\beta c\, dt + dx}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad 0 = dy, \quad 0 = dz,$$

откуда

$$\frac{dx}{dt}=\beta c, \quad \frac{dy}{dt}=0, \quad \frac{dz}{dt}=0. \tag{63.5}$$

Эти формулы показывают, что всякая точка P, закрепленная в системе S', движется относительно системы S с постоянной скоростью βc в направлении оси X. Последний результат позволяет нам говорить, что и вообще инерциальная система S' движется относительно S поступательно с постоянной скоростью βc (в направлении оси X), имея в виду, что так движется всякая точка, скрепленная с системой S'. Обозначим скорость движения S' относительно S через v, так что

$$v=\beta c, \quad \beta=\frac{v}{c}. \tag{63.6}$$

Так как параметр β меняется в пределах

$$-1<\beta<1,$$

то скорость v может принимать значения в пределах

$$-c<v<c.$$

Таким образом, относительная скорость инерциальных систем никогда не достигает скорости света. А так как мы считаем, что в принципе со всяким твердым телом можно связать систему отсчета, то в теории относительности принимается, что вообще никакие два тела не могут иметь относительной скорости, превышающей или хотя бы достигающей скорости света. Далее мы увидим, что все основные формулы приводятся к абсурду, если предположить противное: дело в том, что в них вслед за формулами (63.4) почти во всех основных формулах будет фигурировать радикал

$$\sqrt{1-\beta^2}=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

который становится мнимым, если предположить $v>c$. Принимается также, что никакое возмущение не может распространяться со скоростью, превосходящей c, хотя скорость c и может им достигаться, как это происходит для электромагнитного возмущения.

Теперь формулы (63.4) можно переписать в виде

$$t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad x'=\frac{-vt+x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad y'=y, \quad z'=z. \tag{63.7}$$

Эти формулы перехода от одной инерциальной системы S к другой S' носят название *формул Лоренца.*

Если, обратно, выразить отсюда t, x, y, z через t', x', y', z', то это обратное преобразование, как показывает элементарный подсчет, будет иметь вид

$$t=\frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad x=\frac{vt'+x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad y=y',\quad z=z',\tag{63.8}$$

т. е. отличается от прямого лишь заменой v на $-v$. Это означает, что если система S' движется относительно S со скоростью v, то S движется относительно S' со скоростью $-v$. Это, правда, представляется само собой ясным, но так как нас ждут в дальнейшем выводы, опрокидывающие многие привычные представления, то этот результат следует отметить.

§ 64. Исследование формул Лоренца

При первом взгляде на формулы (63.7) поражает их, казалось бы, полное несходство с формулами (61.1), (61.2) классической теории. А между тем мы знаем, что классические формулы практически безусловно верны, по крайней мере, с большой степенью точности. Поэтому возникает вопрос, как согласовать формулы Лоренца с классическими. Ответ очень прост. На практике мы обычно имеем дело со скоростями, весьма малыми сравнительно со скоростью света, т. е. отношение $\frac{v}{c}$ очень мало, и его квадратом практически можно пренебречь по сравнению с 1. Поэтому можно считать

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\approx 1.\tag{64.1}$$

Кроме того, в первой формуле (63.7) можно пренебречь величиной $\frac{v}{c^2}x$ сравнительно с временем t, так как $\frac{v}{c^2}x$ есть произведение весьма малого промежутка временем $\frac{x}{c}$ *) на весьма малую дробь $\frac{v}{c}$. В результате формулы (63.7) принимают вид

$$t'\approx t,\quad x'\approx -vt+x,\quad y'=y,\quad z'=z,$$

*) Точнее, малым предполагается $\frac{\Delta x}{c}$, где $\Delta x=x-x_0$, а x_0 — некоторая константа; она может быть большой, но дает лишь тривиальное преобразование: $t'=t-\frac{vx_0}{c^2}$.