Если, обратно, выразить отсюда t, x, y, z через t', x', y', z', то это обратное преобразование, как показывает элементарный подсчет, будет иметь вид

$$t=\frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\qquad x=\frac{vt'+x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad y=y',\quad z=z', \tag{63.8}$$

т. е. отличается от прямого лишь заменой v на $-v$. Это означает, что если система S' движется относительно S со скоростью v, то S движется относительно S' со скоростью $-v$. Это, правда, представляется само собой ясным, но так как нас ждут в дальнейшем выводы, опрокидывающие многие привычные представления, то этот результат следует отметить.

§ 64. Исследование формул Лоренца

При первом взгляде на формулы (63.7) поражает их, казалось бы, полное несходство с формулами (61.1), (61.2) классической теории. А между тем мы знаем, что классические формулы практически безусловно верны, по крайней мере, с большой степенью точности. Поэтому возникает вопрос, как согласовать формулы Лоренца с классическими. Ответ очень прост. На практике мы обычно имеем дело со скоростями, весьма малыми сравнительно со скоростью света, т. е. отношение $\frac{v}{c}$ очень мало, и его квадратом практически можно пренебречь по сравнению с 1. Поэтому можно считать

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\approx 1. \tag{64.1}$$

Кроме того, в первой формуле (63.7) можно пренебречь величиной $\frac{v}{c^2}x$ сравнительно с временем t, так как $\frac{v}{c^2}x$ есть произведение весьма малого промежутка временем $\frac{x}{c}$ *) на весьма малую дробь $\frac{v}{c}$. В результате формулы (63.7) принимают вид

$$t'\approx t,\quad x'\approx -vt+x,\quad y'=y,\quad z'=z,$$

*) Точнее, малым предполагается $\frac{\Delta x}{c}$, где $\Delta x=x-x_0$, а x_0 — некоторая константа; она может быть большой, но дает лишь тривиальное преобразование: $t'=t-\frac{vx_0}{c^2}$.

т. е. мы возвращаемся к классическим формулам (61.1), (61.2). Таким образом, *при скоростях, малых сравнительно со скоростью света, теория относительности дает практически те же результаты, что и классическая механика.* Это будет повторяться в дальнейшем постоянно, и, естественно, так оно и должно быть — иначе теория относительности стояла бы в явном противоречии с нашим повседневным опытом. Но при больших скоростях, в повседневной практике недостижимых, появляется разногласие между обеими теориями, и опыт решает этот спор в пользу теории относительности.

Разберем теперь некоторые частные следствия формул Лоренца, которые покажут нам характерные черты новых пространственно-временных соотношений.

1°. *Сокращение продольных размеров движущихся тел.* Пусть на оси X' в инерциальной системе S' покоится стержень длиной l. Обозначим абсциссы концов этого стержня через x'_1, x'_2. Тогда

$$x'_2 - x'_1 = l. \tag{64.2}$$

Абсциссы x'_1, x'_2 остаются постоянными, но t' мы считаем переменным, т. е. рассматриваем существование стержня во времени.

Относительно системы S этот стержень вместе с системой S' движется со скоростью v в направлении оси X, вдоль которой он расположен. Заметим, что вообще оси X и X' все время совпадают в том смысле, что всякое событие, происходящее на оси X с точки зрения S, происходит с точки зрения S' на оси X'. Это сейчас же следует из того, что обращение в нуль y, z влечет обращение в нуль и y', z'.

Попробуем измерить длину нашего стержня относительно системы S. Ввиду того что он движется, нужно зафиксировать положение его концов в какой-либо определенный (один и тот же!) момент времени t, а затем найти расстояние между отмеченными точками. Пусть абсциссы этих точек будут x_1, x_2. Тогда согласно второй формуле (63.7) абсциссы концов стержня в системе S' выразятся следующим образом:

$$x'_1 = \frac{-vt + x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad x'_2 = \frac{-vt + x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Вычитая почленно из второй формулы первую и учитывая, что t имеет в обоих случаях одно и то же значение, получаем:

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Обозначая длину отрезка с точки зрения системы S через l':

$$l' = x_2 - x_1,$$

и пользуясь (64.2), получаем:

$$l = \frac{l'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \text{ т. е. } l' = l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{64.3}$$

Таким образом, стержень, имеющий длину l в той инерциальной системе, где он покоится, имеет длину $l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ в той инерциальной системе, относительно которой он движется со скоростью v в продольном направлении.

Все сказанное относительно стержня применимо, конечно, и к любым твердым телам. Таким образом, когда относительно данной инерциальной системы S твердое тело приводится в поступательное движение с постоянной скоростью v, его размеры в направлении движения сокращаются с точки зрения системы S в отношении $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. В то же время с точки зрения системы S', связанной с самим движущимся телом, в нем не происходит ни малейших изменений. Итак, оказывается, что размеры тела не есть нечто принадлежащее только ему самому; они носят относительный характер, т. е. зависят и от той системы отсчета, к которой тело отнесено.

В дальнейшем мы обнаружим относительный характер еще ряда величин, считавшихся ранее абсолютными. Это обстоятельство нередко давало повод к идеалистическому толкованию: на нем пытались обосновать субъективный характер физических величин, именно, зависимость их от положения наблюдателя на той или иной системе отсчета. В действительности же речь идет о материальных взаимоотношениях двух физических тел: одно, например, наш стержень, другое, практически обычно более массивное и соподчиняющее себе первое,— наша инерциальная система отсчета S. Длина стержня «с точки зрения системы S»—это объективно существующий факт, результат материального взаимодействия этих двух физических тел.

Заметим кстати, что подлинная цель теории относительности не в установлении этой *относительности физических величин,* а (в известном смысле наоборот) в установлении *абсолютного характера физических законов*, одинаковых в любой инерциальной системе.

Сокращение размеров движущегося тела происходит лишь в продольном направлении (т. е. в направлении движения); поперечные же его размеры не меняются. Это видно из формул $y' = y$, $z' = z$, показывающих, что поперечные размеры тел одинаковы с точки зрения обеих инерциальных систем.

2°. *Относительный характер одновременности.* Пусть на оси X в инерциальной системе S происходят два события в точках x_1, x_2 в один и тот же момент времени $t_1 = t_2 = t$. Отметим моменты совершения этих событий t'_1, t'_2 в системе S'. Согласно первой формуле (63.7) получаем:

$$t'_1 = \frac{t - \frac{v}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad t'_2 = \frac{t - \frac{v}{c^2} x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Мы замечаем, что $t'_1 \neq t'_2$, а именно:

$$t'_2 - t'_1 = \frac{\frac{v}{c^2}(x_1 - x_2)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{64.4}$$

Таким образом, два события, одновременных относительно S, оказываются разновременными относительно S' и притом с тем большим расхождением во времени, чем далее отстоят друг от друга с точки зрения системы S места, где они произошли (расстояние учитывается лишь в направлении оси X, т. е. в направлении относительного движения систем S и S'; поперечное смещение в сторону осей Y, Z не играет роли). Так, например, если с точки зрения системы S электрические лампочки, расположенные цепью вдоль оси X, вспыхнули одновременно, то с точки зрения системы S' они вспыхивали последовательно, начиная с того края, который расположен по направлению движения S' относительно S.

Этот результат разрушает наше привычное представление об абсолютном характере времени: одновременность двух событий не есть нечто, свойственное лишь самим этим событиям; она зависит еще от той системы отсчета, относительно которой устанавливается. Более того, возможно, что события, происшедшие относительно системы S в одной последовательности, наблюдаются в системе S' в обратной последовательности. Это легко показать, если, вместо того чтобы брать $t_2 = t_1$, взять $t_2 > t_1$. Тогда, считая $x_2 > x_1$, $v > 0$, мы получим, *если $t_2 - t_1$ достаточно мало*, что

$$t'_2 < t'_1.$$

На первый взгляд это кажется явным абсурдом: если в системе S причина, как и полагается, предшествовала следствию, то не значит ли это, что в системе S следствие будет предшествовать причине?

Этот парадокс разъясняется следующим образом. Прежде всего исключительно важно, что относительный характер одновременности имеет место лишь для событий, происходящих в *разных местах пространства*. В самом деле, если наши события в системе S произошли не только одновременно, но и в одной и той же точке ($x_2=x_1$), то из (64.4) следует, что $t'_2=t'_1$, т. е. одновременность будет наблюдаться и с точки зрения системы S'.

Но раз события произошли в разных местах пространства, то чтобы одно служило причиной, а другое следствием, нужно, чтобы некоторое возмущение, вызванное первым, пришло к месту совершения второго не позже, чем в момент его совершения. Но у нас все возмущения распространяются со скоростью, не превышающей c.

И вот оказывается следующее: когда два события таковы, что их последовательность относительно разных инерциальных систем может быть различной, возмущение, вызванное первым событием, никогда не может своевременно поспеть к месту совершения второго события (т. е. если и приходит, то уже после его совершения). Поэтому из таких двух событий *одно не может служить причиной другого*. Или, что то же самое: если одно событие способно служить причиной другого, т. е. возмущение, вызванное первым событием и распространяющееся со скоростью света, способно своевременно достичь места совершения второго события, то *последовательность таких двух событий одинакова относительно всех инерциальных систем*.

Справедливость наших утверждений будет показана в следующем параграфе, и этим парадокс устраняется.

Заметим, что, переходя от формул (63.3) к (63.4), мы опирались на то, что знак минус в знаменателе первой формулы приводит к обратному течению времени в системе S', причем *речь шла о событиях, происходящих в одной и той же точке* $Q(x, y, z)$ *в системе* S; но в этом случае события способны служить одно причиной другого, и их обратная последовательность действительно представляет абсурд.

3°. *Отставание движущихся часов*. Пусть в системе S' неподвижно укреплены часы, отсчитывающие время t'. Их пространственные координаты x', y', z' являются, следовательно, постоянными. Будем наблюдать показания этих часов с точки зрения системы S. Отмечаем с точки зрения системы S тот момент t_1, когда часы показывают время t'_1; согласно первой формуле (63.8)

$$t_1=\frac{t'_1+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Совершенно аналогично показание часов t_2 наблюдается с точки зрения S в момент t_2:

$$t_2 = \frac{t'_2 + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Вычитая почленно, получаем:

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \text{т. е.} \quad t'_2 - t'_1 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,(t_2 - t_1). \qquad (64.5)$$

Итак, с точки зрения системы S прошел промежуток времени $t_2 - t_1$; если же судить по показаниям движущихся часов (точно таких же, какими измеряется время в системе S), то этот промежуток времени равен $t'_2 - t'_1$, т. е. короче в отношении $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. *Таким образом, движущиеся часы начинают отставать*, ход их замедляется в отношении $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, хотя с точки зрения той инерциальной системы S', которая движется вместе с часами, в часах не произошло абсолютно никаких изменений.

В этом примере, как и в большинстве других, отклонения от обычного положения вещей зависят от значения радикала $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Когда скорость v мала сравнительно со скоростью света c (как это и бывает в повседневной практике), радикал ничтожно мало отличается от единицы, и эти отклонения незаметны. Напротив, при скоростях, близких к скорости света, когда значение радикала приближается к нулю, создается картина, резко отличная от наших обычных представлений.

4°. *Формула сложения скоростей.* Мы уже говорили о том, что относительные скорости инерциальных систем и вообще физических тел не достигают скорости света. На первый взгляд здесь заключено противоречие: допустим, что система S' движется относительно S со скоростью $0{,}9c$ и система S'' относительно S' движется в том же направлении тоже со скоростью $0{,}9c$. Казалось бы, что тогда S'' относительно S должна двигаться со скоростью $1{,}8c$.

Но дело заключается в том, что обычная формула сложения скоростей неверна с точки зрения теории относительности и должна быть заменена новой. В самом деле, пусть некоторая материальная точка движется относительно системы S', причем составляющие ее скорости по осям X', Y', Z' равны v'_x, v'_y, v'_z:

$$\frac{dx'}{dt'} = v'_x, \quad \frac{dy'}{dt'} = v'_y, \quad \frac{dz'}{dt'} = v'_z. \qquad (64.6)$$

Пусть система S' движется относительно S по-прежнему со скоростью v в направлении общей оси X. Тогда, дифференцируя формулы (63.8), получаем:

$$dt=\frac{dt'+\frac{v}{c^2}\,dx'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad dx=\frac{v\,dt'+dx'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad dy=dy',\quad dz=dz',$$

откуда скорость движения точки уже относительно системы S имеет следующие составляющие по осям X, Y, Z:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{v+\frac{dx'}{dt'}}{1+\frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}},$$

$$\frac{dy}{dt}=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\frac{\frac{dy'}{dt'}}{1+\frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}},\qquad \frac{dz}{dt}=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\frac{\frac{dz'}{dt'}}{1+\frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}}.$$

Пользуясь обозначениями (64.6) и аналогичными обозначениями для системы S, запишем окончательно:

$$v_x=\frac{v+v'_x}{1+\frac{vv'_x}{c^2}},\quad v_y=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\frac{v'_y}{1+\frac{vv'_x}{c^2}},\quad v_z=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\frac{v'_z}{1+\frac{vv'_x}{c^2}}. \tag{64.7}$$

Итак, результирующая скорость v_x в направлении оси X, полученная наложением двух скоростей — скорости v системы S' относительно S и скорости v'_x точки относительно S', — равна не просто сумме $v+v'_x$, как в классической механике, а сумме с последующим делением на

$$1+\frac{vv'_x}{c^2}.$$

Когда v и v'_x малы сравнительно с c, эта величина практически равна единице, и мы возвращаемся к классической формуле. Зато если хоть одна из слагаемых скоростей близка к скорости света, то влияние знаменателя велико, и результирующая скорость растет непропорционально мало, в частности, ни в коем случае не может превзойти скорости света c. Это особенно заметно, если взять предельный случай $v=c$. Тогда

$$v_x=\frac{c+v'_x}{1+\frac{cv'_x}{c^2}}=c,$$

т. е. когда одна из слагаемых скоростей равна c, то добавление к ней любой другой скорости ее не меняет. Это, впрочем, есть лишь перефразировка нашего исходного положения — постоянства скорости света относительно всех инерциальных систем.

До сих пор мы говорили о сложении одинаково направленных (по оси X) скоростей v и v'_x. Если же наша точка обладает относительно S' еще «поперечной» скоростью, например, v'_y, то относительно S эта скорость оказывается уже иной, именно, приобретает множитель $\dfrac{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{1+\dfrac{vv'_x}{c^2}}$ (конечно, весьма близкий к единице при небольших v, v'_x).

Мы начали с рассмотрения пространства событий, введения в нем псевдоевклидовой метрики и сопоставления инерциальных систем ортонормированным координатным системам в этом пространстве. Но получив отсюда формулы Лоренца, дающие связь между различными инерциальными системами, мы выводили следствия непосредственно из них, как бы забыв о псевдоевклидовой геометрии. Между тем и отдельные наши конкретные результаты имеют поучительное истолкование в псевдоевклидовой геометрии пространства событий; но для этого нам будут нужны некоторые свойства кривых в псевдоевклидовом пространстве.

§ 65. Кривые в вещественном евклидовом пространстве

В n-мерном аффинном пространстве естественно определить *кривую* как совокупность точек $M(x^i)$, зависящих от одного параметра t:

$$x^i = x^i(t), \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2. \tag{65.1}$$

Под x^i мы понимаем координаты в какой-либо аффинной координатной системе. Зависимость $x^i(t)$ предполагается достаточное число раз дифференцируемой. В частности, если эта зависимость линейная, то мы получаем прямую линию, о которой ранее уже говорилось. Мы ограничиваемся вещественным пространством и все рассматриваемые величины считаем вещественными.

Радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ точки $M(t)$, очевидно, тоже будет функцией от t:

$$\overrightarrow{OM} = \mathbf{x}(t) = x^i(t)\,\mathbf{e}_i. \tag{65.2}$$

Продифференцируем радиус-вектор по t, определяя производную обычным образом:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{x}(t)}{\Delta t}. \tag{65.3}$$