лишь перефразировка нашего исходного положения — постоянства скорости света относительно всех инерциальных систем.

До сих пор мы говорили о сложении одинаково направленных (по оси X) скоростей v и v'_x. Если же наша точка обладает относительно S' еще «поперечной» скоростью, например, v'_y, то относительно S эта скорость оказывается уже иной, именно, приобретает множитель $\dfrac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{vv'_x}{c^2}}$ (конечно, весьма близкий к единице при небольших v, v'_x).

Мы начали с рассмотрения пространства событий, введения в нем псевдоевклидовой метрики и сопоставления инерциальных систем ортонормированным координатным системам в этом пространстве. Но получив отсюда формулы Лоренца, дающие связь между различными инерциальными системами, мы выводили следствия непосредственно из них, как бы забыв о псевдоевклидовой геометрии. Между тем и отдельные наши конкретные результаты имеют поучительное истолкование в псевдоевклидовой геометрии пространства событий; но для этого нам будут нужны некоторые свойства кривых в псевдоевклидовом пространстве.

§ 65. Кривые в вещественном евклидовом пространстве

В n-мерном аффинном пространстве естественно определить *кривую* как совокупность точек $M(x^i)$, зависящих от одного параметра t:

$$x^i = x^i(t), \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2. \tag{65.1}$$

Под x^i мы понимаем координаты в какой-либо аффинной координатной системе. Зависимость $x^i(t)$ предполагается достаточное число раз дифференцируемой. В частности, если эта зависимость линейная, то мы получаем прямую линию, о которой ранее уже говорилось. Мы ограничиваемся вещественным пространством и все рассматриваемые величины считаем вещественными.

Радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ точки $M(t)$, очевидно, тоже будет функцией от t:

$$\overrightarrow{OM} = \mathbf{x}(t) = x^i(t)\,\mathbf{e}_i. \tag{65.2}$$

Продифференцируем радиус-вектор по t, определяя производную обычным образом:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{x}(t)}{\Delta t}. \tag{65.3}$$

При этом переход к пределу для вектора, например, $\mathbf{x}_0 = \lim \mathbf{x}$, мы определяем как переход к пределу для каждой его координаты, $x_0^i = \lim x^i$. Очевидно, смысл этого определения одинаков в любой аффинной координатной системе: если $x_0^i = \lim x^i$ в одной системе, то $x_0^{i'} = \lim x^{i'}$ в любой другой системе в силу одинакового линейного закона преобразования и для x^i, и для x_0^i при переходе к $x^{i'}$ и $x_0^{i'}$. В частности, непрерывность функций $x^i(t)$ равносильна непрерывности векторной функции $\mathbf{x}(t)$, т. е. соотношению $\lim \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0)$ при $t \to t_0$ (в нашем случае при каждом t_0, $t_1 \leqslant t_0 \leqslant t_2$).

Таким образом, координаты вектора $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ по определению получаются предельным переходом от координат вектора $\frac{\Delta\mathbf{x}}{\Delta t}$, а эти последние равны $\frac{\Delta x^i}{\Delta t}$ и дают в пределе $\frac{dx^i}{dt}$. Итак, $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ существует и имеет координаты $\frac{dx^i}{dt}$:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{dx^i}{dt}\mathbf{e}_i. \tag{65.4}$$

Предполагая, что вектор $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ отличен от нуля, мы будем называть его *касательным* вектором к нашей кривой в данной точке $M(t)$. Такой вектор определяется с точностью до численного множителя, так как вдоль прежней кривой можно выбрать новый параметр $\tilde{t}$, и тогда

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tilde{t}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}\frac{dt}{d\tilde{t}}.$$

Прямую линию, проходящую через точку $M(t)$ и направленную по вектору $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$, мы будем называть *касательной* к нашей кривой в точке $M(t)$.

Дифференциал радиуса-вектора определяется как произведение его производной на приращение параметра:

$$d\mathbf{x} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}\Delta t = \frac{dx^i}{dt}\mathbf{e}_i\,dt = dx^i\mathbf{e}_i. \tag{65.5}$$

Так как t — аргумент, то можно писать dt вместо Δt. Дифференциал $d\mathbf{x}$ направлен по касательной и показывает смещение по ней из точки $M(t)$, пропорциональное приращению Δt параметра t. Сравним дифференциал $d\mathbf{x}$ с приращением $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x}(t+\Delta t) - \mathbf{x}(t)$. Очевидно, $\Delta\mathbf{x}$ дает вектор смещения из точки $M(t)$ в другую точку $M(t+\Delta t)$ на кривой. Так как

$$\Delta\mathbf{x} = \Delta x^i(t)\,\mathbf{e}_i, \tag{65.6}$$

то, сравнивая с (65.5), мы видим, что соответствующие координаты векторов $\Delta\mathbf{x}$ и $d\mathbf{x}$ (т. е. $\Delta x^i(t)$ и dx^i) отличаются друг от друга при бесконечно малом Δt на бесконечно малые высшего порядка. Поэтому, окончательно, *смысл дифференциала $d\mathbf{x}$ заключается в том, что он выражает вектор смещения по касательной из точки касания $M(t)$, растущий пропорционально Δt и притом так, что уклонение от истинного смещения по кривой в точку $M(t+\Delta t)$ будет бесконечно малым высшего порядка относительно Δt*. Одновременно здесь содержится разъяснение геометрического смысла касательной: из всех прямых, проходящих через $M(t)$, только по касательной можно смещаться так, что уклонение от кривой будет бесконечно малым высшего порядка сравнительно с самим смещением.

Все сказанное до сих пор относится к кривым в аффинном пространстве и, разумеется, остается верным и в евклидовом пространстве. Но в этом случае добавляются и новые свойства. Прежде всего вдоль кривой вещественного евклидова пространства можно вычислять длину дуги. *Длину дуги* кривой между точками $M_1(t_1)$ и $M_2(t_2)$ проще всего определить как интеграл

$$\overset{\frown}{M_1M_2}=\int\limits_{M_1}^{M_2}|d\mathbf{x}|=\int\limits_{t_1}^{t_2}\left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right|dt \tag{65.7}$$

по аналогии с длиной дуги в обычном евклидовом пространстве черточки означают, что вектор берется по длине. Нетрудно заметить, что выписанный интеграл не зависит от выбора параметра t вдоль кривой. Действительно, при переходе к новому параметру τ, так что $\tau=\tau(t)$ и $t=t(\tau)$ — непрерывно дифференцируемые возрастающие функции, получаем:

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\left|\frac{d\mathbf{x}}{d\tau}\right|d\tau=\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right|\frac{dt}{d\tau}d\tau=\int\limits_{t_1}^{t_2}\left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right|dt.$$

В случае псевдоевклидова пространства касательный вектор $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ может иметь или вещественную, или мнимую, или нулевую длину. Это будет зависеть от того, будет ли скалярный квадрат вектора $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$, или, что то же, вектора $d\mathbf{x}$, положительным, отрицательным или нулем:

$$d\mathbf{x}^2>0,\quad d\mathbf{x}^2<0,\quad d\mathbf{x}^2=0. \tag{65.8}$$

Соответственно этому и наша кривая будет в любом своем куске иметь вещественную, мнимую или нулевую длину (изотропная кривая). Конечно, можно провести кривую и так, что на одном ее участке будет одно положение, а на другом другое, но таких кривых мы рассматривать не будем.

Из формулы (65.7) видно, что если отсчитывать дугу $s=\overset{\frown}{M_0M}$ от некоторой начальной точки $M_0(t_0)$ до переменной точки $M(t)$ на кривой $s=\overset{\frown}{M_0M}$, то ее дифференциал будет выражаться формулой

$$ds=|d\mathbf{x}|=\left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right|dt, \tag{65.9}$$

т. е. совпадает с подынтегральным выражением. Или, что то же,

$$ds^2=d\mathbf{x}^2. \tag{65.10}$$

Если кривая имеет вещественную длину, то s можно принять за параметр t вдоль кривой, и тогда формула (65.9) дает

$$ds=\left|\frac{d\mathbf{x}}{ds}\right|ds, \text{ откуда } \left|\frac{d\mathbf{x}}{ds}\right|=1.$$

Таким образом, производная радиуса-вектора по дуге s дает *единичный касательный вектор*

$$\vec{\boldsymbol{\tau}}=\frac{d\mathbf{x}}{ds}, \qquad \vec{\boldsymbol{\tau}}^2=1. \tag{65.11}$$

Если кривая имеет мнимую длину, то s является чисто мнимой величиной

$$s=\sigma i \tag{65.12}$$

и за параметр t вдоль кривой мы примем *вещественный* коэффициент σ при мнимой единице. Тогда $ds=i\,d\sigma$, и формула (65.9) дает

$$i\,d\sigma=\left|\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma}\right|d\sigma, \quad \text{откуда} \quad \left|\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma}\right|=i. \tag{65.13}$$

Таким образом, производная радиуса-вектора по σ дает *мнимоединичный касательный вектор*

$$\vec{\boldsymbol{\tau}}=\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma}, \qquad \vec{\boldsymbol{\tau}}^2=-1. \tag{65.14}$$

Разумеется, сам вектор $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ — вещественный, и вообще в псевдоевклидовом пространстве мы по-прежнему не рассматриваем каких-либо мнимостей кроме (в некоторых случаях) длин.

Пусть теперь кривая — изотропная, т. е. на любом участке имеет нулевую длину, что равносильно изотропности ее касательного вектора $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ в любой ее точке

$$\left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right|=0, \quad \text{т. е.} \quad \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2=0. \tag{65.15}$$

В этом случае выбор дуги в качестве параметра, конечно, невозможен.

Нас будут особо интересовать псевдоевклидовы пространства индекса 1, так как пространство событый принадлежит к их числу. Для каждой точки такого пространства можно построить, как мы знаем, изотропный гиперконус с вершиной в этой точке, причем векторы вещественной длины, отложенные из данной точки, пойдут вне гиперконуса, векторы мнимой длины — внутри его, а изотропные векторы — по его образующим (рис. 11). Соответственно этому кривая вещественной длины в каждой своей точке направлена вовне изотропного конуса в этой точке, кривая мнимой длины — внутрь его, а изотропная кривая касается его образующей (но, вообще говоря, не совпадает с ней).

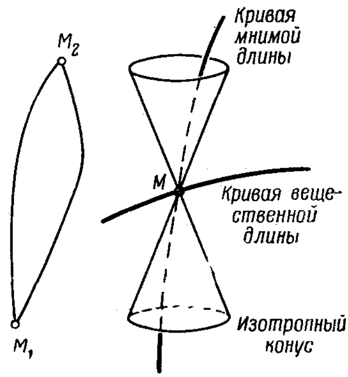

Рис. 11.

§ 66. Кинематика теории относительности в геометрическом истолковании

Рассмотрим процесс движения какой-либо материальной точки. Для этого нужно указать положения, которые занимает точка в отдельные моменты времени, т. е. совокупность событий, зависящую от одного параметра (например, от времени t измеряемого относительно какой-либо системы S). Но такая совокупность событий образует в четырехмерном пространстве событий некоторую линию. В самом деле, зададим процесс движения точки относительно какой-либо инерциальной системы S. Для этого нужно переменные координаты этой точки x, y, z выразить как функции времени:

$$x=f_1(t), \quad y=f_2(t), \quad z=f_3(t). \tag{66.1}$$

Но ct, x, y, z можно рассматривать как ортонормированные координаты x^0, x^1, x^2, x^3 в пространстве событий, так что наши уравнения примут вид

$$x^1=f_1\left(\frac{x^0}{c}\right), \quad x^2=f_2\left(\frac{x^0}{c}\right), \quad x^3=f_3\left(\frac{x^0}{c}\right). \tag{66.2}$$

Мы получаем, следовательно, совокупность событий $M(x^0, x^1, x^2, x^3)$, зависящих от одного параметра x^0, т. е. линию в пространстве событий. *Итак, процесс движения материальной точки изображается линией в пространстве событий.* Если, в частности, движение точки