В этом случае выбор дуги в качестве параметра, конечно, невозможен.

Нас будут особо интересовать псевдоевклидовы пространства индекса 1, так как пространство событий принадлежит к их числу. Для каждой точки такого пространства можно построить, как мы знаем, изотропный гиперконус с вершиной в этой точке, причем векторы вещественной длины, отложенные из данной точки, пойдут вне гиперконуса, векторы мнимой длины — внутри его, а изотропные векторы — по его образующим (рис. 11). Соответственно этому кривая вещественной длины в каждой своей точке направлена вовне изотропного конуса в этой точке, кривая мнимой длины — внутрь его, а изотропная кривая касается его образующей (но, вообще говоря, не совпадает с ней).

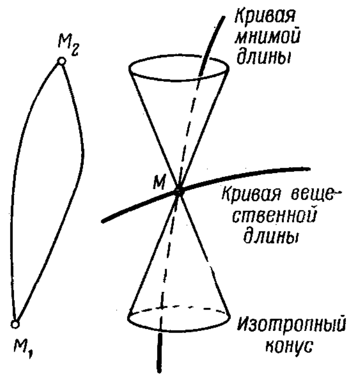

Рис. 11.

§ 66. Кинематика теории относительности в геометрическом истолковании

Рассмотрим процесс движения какой-либо материальной точки. Для этого нужно указать положения, которые занимает точка в отдельные моменты времени, т. е. совокупность событий, зависящую от одного параметра (например, от времени t измеряемого относительно какой-либо системы S). Но такая совокупность событий образует в четырехмерном пространстве событий некоторую линию. В самом деле, зададим процесс движения точки относительно какой-либо инерциальной системы S. Для этого нужно переменные координаты этой точки x, y, z выразить как функции времени:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \tag{66.1}$$

Но ct, x, y, z можно рассматривать как ортонормированные координаты x^0, x^1, x^2, x^3 в пространстве событий, так что наши уравнения примут вид

$$x^1 = f_1\left(\frac{x^0}{c}\right), \quad x^2 = f_2\left(\frac{x^0}{c}\right), \quad x^3 = f_3\left(\frac{x^0}{c}\right). \tag{66.2}$$

Мы получаем, следовательно, совокупность событий $M(x^0, x^1, x^2, x^3)$, зависящих от одного параметра x^0, т. е. линию в пространстве событий. *Итак, процесс движения материальной точки изображается линией в пространстве событий.* Если, в частности, движение точки *равномерное и прямолинейное*, то функции (66.1) линейные, а следовательно, и x^1, x^2, x^3 линейно зависят от x^0, и *линия будет прямой*.

Кривая, отображающая в пространстве событий процесс движения материальной точки, называется ее *четырехмерной траекторией*. Впрочем, вернее было бы говорить об изображении не «процесса движения», а «истории существования» данной материальной точки. Дело в том, что движение мы рассматриваем всегда *относительно* той или иной системы отсчета S, между тем четырехмерная траектория является построением *абсолютным*, не зависящим от выбора системы отсчета S и в таком выборе вообще не нуждающимся. Действительно, грубо говоря, четырехмерная траектория есть совокупность событий, из которых состоит история существования данной материальной точки, следовательно, определяется вне связи с выбором S и представляет собой *однозначным образом определенную кривую в пространстве событий*. В связи с этим и касательный к ней мнимоединичный вектор — тоже вполне определенный вектор, инвариантный относительно выбора системы отсчета. Однако не всякая кривая в пространстве событий может служить четырехмерной траекторией материальной точки: для этого необходимо и достаточно, чтобы кривая была *мнимой длины*.

В самом деле, материальная точка может двигаться лишь со скоростью, меньшей c. Запишем это с точки зрения инерциальной системы S, в которой закон движения точки имеет вид (66.1).

Так как проекции скорости на оси X, Y, Z суть $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, то получаем:

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}<c, \tag{66.3}$$

откуда

$$-c^2dt^2+dx^2+dy^2+dz^2<0, \tag{66.4}$$

или, переходя в соответствующие ортонормированные координаты в пространстве событий:

$$-(dx^0)^2+(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2<0. \tag{66.5}$$

Но согласно (65.5) для нашей четырехмерной траектории

$$d\mathbf{x}=dx^i\mathbf{e}_i=dx^0\mathbf{e}_0+dx^1\mathbf{e}_1+dx^2\mathbf{e}_2+dx^3\mathbf{e}_3,$$

откуда

$$d\mathbf{x}^2=-(dx^0)^2+(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2<0, \tag{66.6}$$

а это согласно (65.8) означает, что *четырехмерная траектория есть кривая мнимой длины в пространстве событий*. Мы будем относить ее к вещественному параметру $\sigma=\frac{s}{i}$ (§ 65), условившись отсчитывать σ в сторону возрастания x^0. Пишем ее уравнения в виде

$$x^0=x^0(\sigma), \quad x^1=x^1(\sigma), \quad x^2=x^2(\sigma), \quad x^3=x^3(\sigma). \tag{66.7}$$

При этом

$$ds=|d\mathbf{x}|=\sqrt{-dx^{0^2}+dx^{1^2}+dx^{2^2}+dx^{3^2}}=$$
$$=i\sqrt{dx^{0^2}-dx^{1^2}-dx^{2^2}-dx^{3^2}},$$

так что

$$d\sigma=\sqrt{dx^{0^2}-dx^{1^2}-dx^{2^2}-dx^{3^2}}. \tag{66.8}$$

Касательный вектор

$$\vec{\tau}=\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma}$$

будет, как мы знаем, мнимоединичным. Его координаты имеют при этом вид

$$\tau^i=\frac{dx^i}{d\sigma}=\frac{dx^i}{\sqrt{dx^{0^2}-dx^{1^2}-dx^{2^2}-dx^{3^2}}}. \tag{66.9}$$

Ясно, что и, обратно, всякая кривая мнимой длины в пространстве событий может служить четырехмерной траекторией некоторой материальной точки, так как обеспечивает скорость движения, меньшую c.

Будем представлять себе, как это делается в геометрической оптике, что свет в пустоте распространяется прямолинейными лучами наподобие частиц, движущихся прямолинейно и равномерно со скоростью c. Тогда можно говорить о четырехмерных траекториях распространения света; эти траектории будут, очевидно, *прямыми линиями* и притом *изотропными*, так как в формулах (66.3)—(66.6) придется везде изменить знак $<$ на $=$.

Пусть событие M состоит в том, что световой сигнал исходит в данный момент из данной точки; тогда картина его распространения по всевозможным направлениям изображается *в пространстве событий всевозможными образующими изотропного гиперконуса, исходящими из точки M (точнее, «верхними» полуобразующими,* так как «нижние» полуобразующие отвечают времени, предшествующему подаче сигнала).

Четырехмерные же траектории материальных точек будут представлять собой кривые, в каждой своей точке направленные *внутрь* соответствующего изотропного гиперконуса, что означает скорость движения, меньшую c.

Параметр σ (деленный на c) имеет физический смысл так называемого собственного времени материальной частицы (под которой можно понимать в известном контексте и достаточно крупное тело, например космический корабль или даже планету).

Действительно, на бесконечно малом отрезке четырехмерной траектории вычислим $dx^0 = c\,dt$ в системе отсчета S, в этот момент движущейся «вместе с частицей» или, что то же самое, в системе отсчета S, относительно которой частица в этот момент покоится:

$$dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0.$$

Получаем согласно (66.8):

$$d\sigma = dx^0 = c\,dt.$$

Естественно принять, что внутренние процессы, происходящие в неравномерно движущейся «частице», согласуются с течением времени $t = \frac{1}{c}\sigma$; в самом деле, на каждом бесконечно малом участке четырехмерной траектории $\frac{d\sigma}{c}$ имеет смысл протекшего времени dt в системе S, движущейся в этот момент «вместе с частицей».

Если две различные частицы имеют четырехмерные траектории с общей начальной точкой M_1 и общей конечной точкой M_2, то собственное время $\frac{1}{c}\sigma$, протекшее от «начальной встречи» частиц до их «конечной встречи», имеет, вообще говоря, свое значение для каждой из частиц, так как их четырехмерные траектории, соединяющие точки M_1, M_2, могут быть весьма различными (рис. 11). При этом, как нетрудно показать, наибольшего значения протекшее время достигает в случае прямолинейной траектории (см. (103.15)).

Если одна из «частиц» — Земля, а другая — космический корабль, улетающий с Земли с очень большой скоростью, а затем на нее возвращающийся, то из сказанного следует, что космонавты по возвращении на Землю постареют меньше, чем люди, оставшиеся на Земле. Дело в том, что четырехмерную траекторию Земли приближенно можно считать прямой линией взамен «винтовой линии», сильно вытянутой в направлении оси x^0, как это на самом деле имеет место (в системе отсчета S, связанной с Солнцем).

Мы хотим теперь кинематические результаты, полученные в § 64, геометрически истолковать в пространстве событий. По-прежнему рассматриваем инерциальные системы S и S', связанные формулами Лоренца (63.7), (63.8). Но для простоты и наглядности мы будем рассматривать *лишь события, происходящие на оси X в системе S и, значит, на оси X' в системе S'*.

Другими словами, мы считаем $y = z = 0$, а значит (согласно формулам Лоренца), и $y' = z' = 0$. Так как ct, x, y, z в пространстве событий представляют собой ортонормированные координаты x^0, x^1, x^2, x^3, то это означает, что все рассматриваемые события располагаются в двумерной плоскости $x^2 = x^3 = 0$ (или, что то же, $x^{2'} = x^{3'} = 0$). Это будет координатная плоскость, построенная на ортах $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$ или равным образом на ортах $\mathbf{e}_{0'}$, $\mathbf{e}_{1'}$, и притом псевдоевклидова, так как $\mathbf{e}_0^2 = -1$, $\mathbf{e}_1^2 = 1$. Эту псевдоевклидову плоскость мы и будем рассматривать, выделив ее из пространства событий (рис. 12).

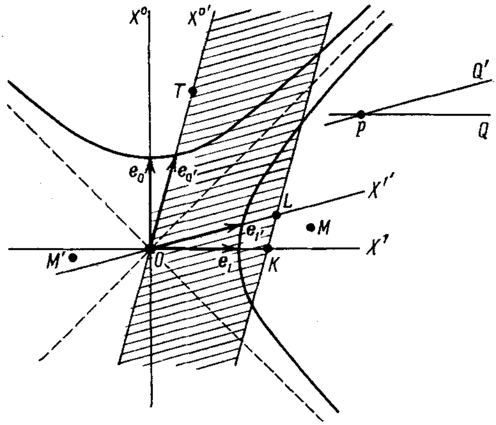

Рис. 12.

Инерциальные системы S и S' представлены в этой плоскости ортонормированными реперами ($\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$) и ($\mathbf{e}_{0'}$, $\mathbf{e}_{1'}$) и соответственно координатными системами (x^0, x^1) и ($x^{0'}$, $x^{1'}$). В силу $x^2 = x^3 = 0$ мы сохраняем лишь две из формул Лоренца

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad x' = \frac{-vt + x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{66.10}$$

и обратные формулы

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad x = \frac{vt' + x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{66.11}$$

Рассмотрим прежде всего вопрос об одновременности событий. Относительно системы S одновременными будут события с одинаковыми значениями t:

$$t = \text{const}, \quad \text{т. е.} \quad x^0 = \text{const}. \tag{66.12}$$

Но уравнение $x^0 = \text{const}$ определяет на нашей плоскости прямую, параллельную оси X^1, так что *одновременные относительно системы S события располагаются на одной прямой, например PQ, параллельной оси X^1*. В частности, события, происшедшие в начальный момент $t = 0$, т. е. $x^0 = 0$, изображаются точками самой оси X^1. Как известно (конец § 62), псевдоевклидовы расстояния между событиями, одновременными относительно какой-либо системы S, выражают просто расстояния между точками, где эти события произошли (тоже относительно S). На рис. 12 псевдоевклидово расстояние между событиями P, Q можно измерить, взяв отношение отрезка PQ к единице длины, отложенной в том же направлении (орт $\mathbf{e}_1$). Это отношение выражает расстояние между точками, где произошли события P, Q, с точки зрения системы S.

Совершенно аналогично события, одновременные относительно S', характеризуются условием

$$t' = \text{const}, \quad \text{т. е.} \quad x^{0\prime} = \text{const} \tag{66.13}$$

и изображаются точками какой-либо прямой, например, PQ', параллельной оси $X^{1\prime}$. В частности, события, происшедшие в начальный момент $t' = 0$, изображаются точками самой оси $X^{1\prime}$. Ясно, что события, одновременные относительно системы S, будут разновременными относительно системы S'. Далее, изображенное на рисунке событие M расположено над осью X^1 и под осью $X^{1\prime}$, т. е. произошло с точки зрения системы S после начального момента $t = 0$, а с точки зрения системы S' — до начального момента $t = 0$; событие же M', наоборот, произошло с точки зрения системы S до начального момента $t = 0$, а с точки зрения системы S' — после начального момента $t' = 0$. Выходит, что относительно системы S событие M' произошло раньше, а M — позже; относительно же системы S' — наоборот.

Процесс движения какой-нибудь точки, закрепленной в системе S' (на оси X'), характеризуется тем, что $x' = \text{const}$, а t' меняется. Другими словами, мы получаем совокупность событий, характеризуемую уравнением

$$x^{1\prime} = \text{const} \qquad (x^{0\prime} \text{ — переменное})$$

и изображаемую, следовательно, прямой, параллельной $OX^{0\prime}$.

Прямые линии, параллельные $OX^{0\prime}$, представляют собой четырехмерные траектории точек, закрепленных на оси X' в системе S'.

Аналогично прямые линии, параллельные OX^0, дают четырехмерные траектории точек, закрепленных на оси X в системе S:

$$x = \text{const}, \quad \text{т. е.} \quad x^1 = \text{const}.$$

Если мы хотим изобразить процесс движения целого стержня, покоящегося, например, в системе S' на оси X', то нужно взять совокупность четырехмерных траекторий всех его точек (стержень мы представляем себе в виде отрезка). Пусть в начальный момент $t' = 0$ стержень изображается отрезком OL оси $X^{1\prime}$ (ось $OX^{1\prime}$ в пространстве событий, как мы знаем, изображает ось X' в системе S', точнее, происходящие на этой оси события в начальный момент $t' = 0$).

Тогда в другие моменты времени t' стержень будет изображаться отрезком OL, параллельно сдвинутым в направлении оси $X^{0'}$ (см. штриховку на рисунке). Не надо забывать, что стержень покоится в системе S', и его различные изображения показывают лишь течение времени, а не перемену места: у каждой точки стержня $x^{1'} = \text{const}$, а меняется лишь $x^{0'}$.

В результате на рис. 12 история существования стержня изобразится целой заштрихованной полосой. Ее можно получить также, строя четырехмерные траектории каждой точки стержня, т. е. проводя параллели оси $X^{0'}$ через все точки отрезка OL.

Рассмотрим эту полосу с точки зрения координатной системы X^0OX^1. Здесь она уже не вытянута вдоль оси X^0, а является наклонной. Это говорит о том, что происходит не только течение времени, но и перемена места. И действительно, относительно системы S стержень движется вместе с системой S'. Желая рассмотреть этот движущийся стержень в какой-нибудь момент времени t с точки зрения системы S, например, в начальный момент, мы должны положить:

$$t = 0, \qquad \text{т. е.} \qquad x^0 = 0,$$

и рассмотреть соответствующие точки полосы. В результате мы получаем отрезок OK на оси X^1, который изображает наш стержень в начальный момент $t = 0$ с точки зрения системы S. В другие моменты времени t стержень будет изображаться параллельными OK срезами полосы.

Обращает на себя внимание, что когда относительно системы S мы фиксируем движущийся стержень в определенный момент времени t (например, в виде отрезка OK при $t = 0$), то относительно системы S' мы фиксируем разные точки этого стержня *в разные моменты времени* (значения $x^{0'}$ будут для различных точек различными).

Соотношение (64.3)

$$l' = l\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

можно было бы элементарным путем вывести из нашего рисунка. При этом, очевидно, l будет равно отношению отрезка OL к единице длины на оси $OX^{1'}$ (орт $\mathbf{e}_{1'}$), а l' — отношению OK к единице длины на OX^1 (орт $\mathbf{e}_1$). На глаз видно, что $l' < l$.

Возвращаемся в полное пространство событий и займемся вопросом, в каких случаях события M, $\tilde{M}$ могут влиять одно на другое, в частности, одно может служить причиной другого. Мы уже упоминали, что это возможно тогда, когда сигнал, распространяющийся со скоростью света, успевает дойти от места одного до места другого события за время, протекшее между этими событиями. Будем рассматривать наши события в *какой-либо инерциальной системе* S. Записываем наше условие:

$$\frac{1}{c}\sqrt{(\tilde{x}-x)^2+(\tilde{y}-y)^2+(\tilde{z}-z)^2} \leqslant |\tilde{t}-t|, \qquad (66.14)$$

т. е. время, нужное свету, чтобы пройти соответствующее расстояние, не превышает времени, протекшего между событиями. Отсюда следует:

$$-c^2(\tilde{t}-t)^2+(\tilde{x}-x)^2+(\tilde{y}-y)^2+(\tilde{z}-z)^2 \leqslant 0,$$

т. е.

$$-(\tilde{x}^0-x^0)^2+(\tilde{x}^1-x^1)^2+(\tilde{x}^2-x^2)^2+(\tilde{x}^3-x^3)^2 \leqslant 0 \qquad (66.15)$$

(так как ct, x, y, z — не что иное, как ортонормированные координаты x^0, x^1, x^2, x^3). Пользуясь (62.4), получаем, наконец,

$$\overrightarrow{M\tilde{M}}^2 \leqslant 0. \qquad (66.16)$$

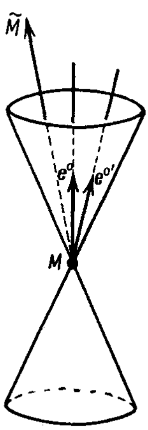

Рис. 13.

Таким образом, для того чтобы из двух событий M, $\tilde{M}$ одно могло влиять на другое, необходимо и достаточно, чтобы длина вектора $\overrightarrow{M\tilde{M}}$ $\left(\text{равная } \sqrt{\overrightarrow{M\tilde{M}}^2}\right)$ была мнимой или нулевой. Это условие носит, как видим, инвариантный характер (рис. 13).

Мы не уточняли до сих пор, какое именно из двух событий влияет на другое. Допустим, что M влияет на $\tilde{M}$ и, следовательно, предшествует ему во времени, так что $x^0 < \tilde{x}^0$.

Рассмотрим те же события M, $\tilde{M}$ относительно другой инерциальной системы S'. В § 63 мы выяснили, что при переходе от S к S' в первой формуле (63.3), а следовательно, и (63.2) приходится сохранить в знаменателе лишь знак $+$. Но тогда согласно (63.2)

$$x^{0'} = \frac{x^0-\beta x^1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (66.17)$$

Переписывая эту же формулу для события $\tilde{M}$ и вычитая из нее (66.17), получим:

$$\tilde{x}^{0'} - x^{0'} = \frac{(\tilde{x}^0-x^0)-\beta(\tilde{x}^1-x^1)}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (66.18)$$

Так как $|\beta| < 1$ и, как вытекает из (66.16), $|\tilde{x}^1-x^1| \leqslant |\tilde{x}^0-x^0|$, то вычитаемое в числителе (66.18) по модулю меньше уменьшаемого, а значит, числитель имеет тот же знак, как и уменьшаемое $\tilde{x}^0 - x^0$, т. е. положителен. Таким образом, и левая часть (66.18) положительна и $\tilde{x}^{0\prime} > x^{0\prime}$.

Итак, если вектор $\overrightarrow{M\tilde{M}}$ имеет мнимую или нулевую длину и если событие $\tilde{M}$ следует за M с точки зрения инерциальной системы S $(\tilde{x}^0 > x^0)$, то $\tilde{M}$ следует за M и с точки зрения любой другой инерциальной системы S' $(\tilde{x}^{0\prime} > x^{0\prime})$.

Следовательно, как раз в тех случаях, когда событие M может влиять на $\tilde{M}$, временнáя последовательность этих событий является абсолютной, и $\tilde{M}$ следует за M с точки зрения любой инерциальной системы S. Это показывает, что парадокс с обращением последовательности причины и следствия в действительности места не имеет. Когда же M, $\tilde{M}$ не могут влиять друг на друга, т. е. когда вектор $\overrightarrow{M\tilde{M}}$ вещественной длины, тогда, как нетрудно показать, всегда возможно обращение последовательности событий M, $\tilde{M}$ за счет перехода к другой инерциальной системе. Но это не приводит к парадоксам ввиду отсутствия какого-либо влияния одного события на другое.

§ 67. Динамика точки

Мы будем рассматривать движение материальной точки в какой-нибудь одной инерциальной системе S, предполагая в соответствии с основной установкой теории относительности, что все сказанное справедливо и в любой другой инерциальной системе.

Еще до появления теории относительности был установлен экспериментальный факт зависимости массы тел от их скорости. А именно, если масса тела в состоянии покоя равна m_0, то при движении со скоростью u она будет равна:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \tag{67.1}$$

При $u \to c$ масса m стремится к бесконечности, что с новой точки зрения подтверждает невозможность разогнать до скорости света тело, обладающее массой покоя.

Мы будем рассматривать материальную точку с массой покоя m_0 и переменной массой m. Вектор скорости обозначим $\mathbf{u}$, вектор силы, действующей на точку, обозначим $\mathbf{F}$.