то вычитаемое в числителе (66.18) по модулю меньше уменьшаемого, а значит, числитель имеет тот же знак, как и уменьшаемое $\tilde{x}^0 - x^0$, т. е. положителен. Таким образом, и левая часть (66.18) положительна и $\tilde{x}^{0\prime} > x^{0\prime}$.

Итак, если вектор $\overrightarrow{M\tilde{M}}$ имеет мнимую или нулевую длину и если событие $\tilde{M}$ следует за M с точки зрения инерциальной системы S $(\tilde{x}^0 > x^0)$, то $\tilde{M}$ следует за M и с точки зрения любой другой инерциальной системы S' $(\tilde{x}^{0\prime} > x^{0\prime})$.

Следовательно, как раз в тех случаях, когда событие M может влиять на $\tilde{M}$, временнáя последовательность этих событий является абсолютной, и $\tilde{M}$ следует за M с точки зрения любой инерциальной системы S. Это показывает, что парадокс с обращением последовательности причины и следствия в действительности места не имеет. Когда же M, $\tilde{M}$ не могут влиять друг на друга, т. е. когда вектор $\overrightarrow{M\tilde{M}}$ вещественной длины, тогда, как нетрудно показать, всегда возможно обращение последовательности событий M, $\tilde{M}$ за счет перехода к другой инерциальной системе. Но это не приводит к парадоксам ввиду отсутствия какого-либо влияния одного события на другое.

§ 67. Динамика точки

Мы будем рассматривать движение материальной точки в какой-нибудь одной инерциальной системе S, предполагая в соответствии с основной установкой теории относительности, что все сказанное справедливо и в любой другой инерциальной системе.

Еще до появления теории относительности был установлен экспериментальный факт зависимости массы тел от их скорости. А именно, если масса тела в состоянии покоя равна m_0, то при движении со скоростью u она будет равна:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \tag{67.1}$$

При $u \to c$ масса m стремится к бесконечности, что с новой точки зрения подтверждает невозможность разогнать до скорости света тело, обладающее массой покоя.

Мы будем рассматривать материальную точку с массой покоя m_0 и переменной массой m. Вектор скорости обозначим $\mathbf{u}$, вектор силы, действующей на точку, обозначим $\mathbf{F}$.

Второй закон Ньютона записывается теперь следующим образом:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{u}), \tag{67.2}$$

т. е. сила $\mathbf{F}$ равна производной от импульса $m\mathbf{u}$ по времени t. Это выражение не сводится к произведению массы m на ускорение $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$, так как масса m переменная и при дифференцировании дает дополнительный член.

В теории относительности и во всей современной физике играет исключительно важную роль *закон взаимосвязи массы и энергии*. Он состоит в том, что *наличие у данного тела энергии E означает наличие у него массы $\frac{E}{c^2}$, и наоборот, наличие массы m означает наличие энергии mc^2*:

$$E = mc^2. \tag{67.3}$$

Этот закон подтверждается физическим опытом, особенно ядерными реакциями, при которых излучение энергии связано с соответствующим уменьшением массы ядра или его остатков.

Естественно, что формально «вывести» этот закон в полной общности нельзя. Однако полезно проделать следующую выкладку, которая в значительной мере способна убедить в справедливости этого закона.

Пусть наша материальная точка движется для простоты по прямой линии, например, по оси X, под действием силы $\mathbf{F}$, тоже направленной по оси X. Подсчитаем работу, произведенную силой на каком-нибудь участке пути от точки P_1 до P_2:

$$A = \int_{P_1}^{P_2} F\,dx. \tag{67.4}$$

Формула (67.2) для движения вдоль оси X принимает вид

$$F = \frac{d}{dt}(mu), \qquad \text{где} \qquad u = \frac{dx}{dt}. \tag{67.5}$$

Преобразуем интеграл (67.4), пользуясь (67.5):

$$A = \int_{P_1}^{P_2} \frac{d}{dt}(mu)\,dx = \int_{P_1}^{P_2} d(mu)\,\frac{dx}{dt} = \int_{P_1}^{P_2} d(mu)\,u.$$

Мы нарочно вместо пределов в определенном интеграле указываем лишь начало P_1 и конец P_2 данного пути. Это избавляет нас от необходимости каждый раз отдавать отчет в том, что служит аргументом под знаком интеграла.

Последний из полученных интегралов берем по частям и получаем:

$$A = mu^2 \Big|_{P_1}^{P_2} - \int_{P_1}^{P_2} mu\,du.$$

Заменяя под знаком интеграла m согласно (67.1), продолжаем выкладку:

$$A = mu^2 \Big|_{P_1}^{P_2} - \int_{P_1}^{P_2} \frac{m_0 u\,du}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = mu^2 \Big|_{P_1}^{P_2} + m_0 c^2 \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\,\Big|_{P_1}^{P_2}.$$

Заменяя, наконец, m_0 через $m\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$, получаем окончательно

$$A = mc^2 \Big|_{P_1}^{P_2} = (m_2 - m_1)\,c^2,$$

где m_1, m_2 — значения массы в начале и конце пути. Так как работа A, совершенная силой F над нашей материальной точкой, пошла на увеличение ее энергии (именно, *кинетической* энергии), то

$$A = E_2 - E_1,$$

где E_1, E_2 — значения энергии E нашей материальной точки в начале и конце пути. Сравнивая две последние формулы, получаем:

$$E_2 - E_1 = (m_2 - m_1)\,c^2,$$

т. е. приращение энергии нашей материальной точки равно приращению ее массы, умноженному на c^2.

Такая взаимосвязь между энергией и массой может показаться случайной, относящейся лишь к кинетической энергии. Однако на основе этого частного случая можно привести некоторые соображения в пользу универсального характера закона. В самом деле, энергия, приобретенная нашей точкой, должна быть в силу закона сохранения энергии откуда-то заимствована. Но и масса, приобретенная нашей точкой, тоже должна быть откуда-то заимствована в силу закона сохранения массы. Естественно предположить, что и энергия и масса были заимствованы у одного и того же тела K, именно того тела, которое действовало на нашу точку с силой F, чем и было вызвано приращение и массы и энергии точки («тело K» здесь нужно понимать в широком смысле; оно может включать в себя и силовое поле, под действием которого находится наша точка). Но в таком случае получается, что потеря телом K некоторого количества энергии, независимо от вида этой энергии, сопровождается потерей и соответствующего количества массы.

Разумеется, это лишь наводящие соображения, говорящие в пользу закона $E=mc^2$. Подлинным его доказательством является прямая и косвенная проверка на опыте; последняя состоит в подтверждении опытом теории относительности, одним из краеугольных камней которой является этот закон.

Запишем формулу кинетической энергии точки с массой покоя m_0 и скоростью движения u. В состоянии покоя точка обладает массой m_0 и, следовательно, энергией m_0c^2; двигаясь со скоростью u, она обладает массой $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$ и, следовательно, энергией $\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$. Приращение энергии и составляет *кинетическую* энергию точки:

$$T=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-1\right). \tag{67.6}$$

Эта формула как будто совсем не похожа на обычную, но когда u мало сравнительно с c, то, пренебрегая величинами порядка $\left(\frac{u}{c}\right)^4$ и выше, получаем:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\approx 1+\frac{u^2}{2c^2},$$

откуда

$$T\approx\frac{m_0u^2}{2},$$

и мы возвращаемся к обычной формуле. Разумеется, все подсчеты производятся в какой-либо инерциальной системе S.

Кроме энергии mc^2 большое значение имеет импульс движущейся точки $m\mathbf{u}$, где $\mathbf{u}$ — вектор скорости. Запишем проекции импульса на координатные оси X, Y, Z в системе S:

$$mu_x,\quad mu_y,\quad mu_z;$$

здесь

$$u_x=\frac{dx}{dt},\quad u_y=\frac{dy}{dt},\quad u_z=\frac{dz}{dt}. \tag{67.7}$$

Выразим еще скорость по абсолютной величине:

$$u=|\mathbf{u}|=\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}=\frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{dt}. \tag{67.8}$$

Теперь переходим к истолкованию всех этих величин в четырехмерном пространстве событий. Процесс движения материальной точки задается четырехмерной траекторией мнимой длины, которую согласно (66.7) мы будем относить к параметру σ в какой-нибудь ортонормированной координатной системе x^i:

$$x^i = x^i(\sigma). \tag{67.9}$$

Координаты мнимоединичного касательного вектора $\vec{\tau}$ равны согласно (66.9):

$$\tau^i = \frac{dx^i}{d\sigma}, \quad \text{где} \quad d\sigma = \sqrt{dx^{0^2} - dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2}}. \tag{67.10}$$

Пусть наша ортонормированная координатная система в пространстве событий изображает некоторую инерциальную систему S, так что

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z.$$

Тогда относительно инерциальной системы S отдельные координаты касательного вектора $\vec{\tau}$ имеют следующий смысл.

Так как

$$d\sigma = \sqrt{c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = \\ = c\,dt\sqrt{1 - \frac{u_x^2}{c^2} - \frac{u_y^2}{c^2} - \frac{u_z^2}{c^2}} = c\,dt\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}},$$

то

$$\left.\begin{aligned} \tau^0 &= \frac{dx^0}{d\sigma} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, & \tau^1 &= \frac{dx^1}{d\sigma} = \frac{u_x}{c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \\ \tau^2 &= \frac{dx^2}{d\sigma} = \frac{u_y}{c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, & \tau^3 &= \frac{dx^3}{d\sigma} = \frac{u_z}{c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right\} \tag{67.11}$$

Мы воспользовались здесь формулами (67.7), (67.8).

Мнимоединичный касательный к четырехмерной траектории вектор $\vec{\tau}$ никак не отражает индивидуальности рассматриваемой материальной точки. Эта индивидуальность в данной связи характеризуется массой покоя m_0, или, что то же самое, энергией покоя m_0c^2:

$$E_0 = m_0c^2. \tag{67.12}$$

Мы построим в каждой точке четырехмерной траектории касательный к ней вектор $E_0\vec{\tau}$, умножив мнимоединичный касательный *вектор $\vec{\tau}$ на энергию покоя. Этот вектор мы будем называть (четырехмерным) вектором энергии-импульса нашей материальной точки* (рис. 14). Смысл этого названия сейчас выяснится.

Вектор энергии-импульса имеет постоянную длину $E_0 i$, так как вектор $\vec{\tau}$ имеет длину i. Таким образом, вектор энергии импульса, вслед за четырехмерной траекторией, которой он касается, является инвариантным геометрическим построением в пространстве событий, *совершенно не зависящим от выбора инерциальной системы* S (энергия покоя E_0 зависит лишь от выбора самой материальной точки).

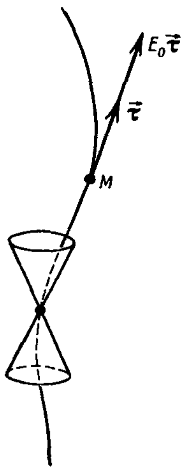

Рис. 14.

Но, конечно, ничто не мешает нам рассматривать вектор энергии-импульса и в инерциальной системе S, точнее, в соответствующей ортонормированной координатной системе x^i.

Координаты вектора энергии-импульса получатся умножением координат $\vec{\tau}$ (67.11) на $E_0 = m_0 c^2$:

$$E_0 \tau^0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \qquad E_0 \tau^1 = \frac{m_0 u_x c}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \text{ и т. д.}$$

Пользуясь (67.1), получим окончательно:

$$\left.\begin{aligned} E_0 \tau^0 &= mc^2, & E_0 \tau^1 &= m u_x c, \\ E_0 \tau^2 &= m u_y c, & E_0 \tau^3 &= m u_z c. \end{aligned}\right\} \qquad (67.13)$$

Таким образом, нулевая координата вектора энергии-импульса выражает энергию материальной точки, а три другие — умноженные на c — составляющие ее импульса по осям X, Y, Z. Название вектора энергии-импульса этим оправдано: его координаты, вычисленные в *ортонормированной координатной системе* x^i, определяют энергию и три составляющие импульса материальной точки *относительно соответствующей инерциальной системы* S.

Подобно тому, как пространственная и временна́я протяженность мира изображается в четырехмерном пространстве событий единой псевдоевклидовой метрикой, так энергия и импульс материальной точки изображаются единым четырехмерным вектором. «Распадение» его на энергию и три составляющие импульса происходит лишь по отношению к той или иной инерциальной системе S.

Существование инвариантного вектора энергии-импульса с координатами (67.13) представляет интерес не только с точки зрения четырехмерного геометрического истолкования механики. Напротив, важнейшее значение этого факта в другом: до сих пор мы предполагали, что динамика точки строится одинаково в каждой инерциальной системе S, но не знали, как связаны между собой соответствующие величины для *разных* систем S, S'; *теперь же, зная энергию и импульс материальной точки в одной инерциальной системе* S, *мы можем вычислять эти величины и в любой другой инерциальной системе* S'.

В самом деле, *поскольку энергия и три составляющие импульса (умноженные на* c) *образуют в пространстве событий координаты инвариантного вектора* $E_0\overrightarrow{\boldsymbol{\tau}}$, *то они и преобразуются соответствующим образом*. А именно, переход от одного ортонормированного репера $\mathfrak{R}$ (отвечающего S) к другому, $\mathfrak{R}'$, (отвечающему S') выражается формулами

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{e}_i, \quad \overrightarrow{OO'} = -A^{i'}\mathbf{e}_{i'} \tag{67.14}$$

и влечет за собой, как мы знаем, преобразование координат точки (т. е. события)

$$x^{i'} = A^{i'}_i x^i + A^{i'} \tag{67.15}$$

и преобразование координат вектора

$$x^{i'} = A^{i'}_i x^i. \tag{67.16}$$

При этом матрица $A^{i'}_i$ (как и обратная ей матрица $A^i_{i'}$) должна быть в нашем случае псевдоортогональной 4-го порядка, индекса 1 с добавочным условием $A^{0'}_0 > 0$ (см. (62.11)). *Таким образом, чтобы получить закон преобразования координат* x^0, x^1, x^2, x^3 *инвариантного вектора, достаточно отбросить свободные члены в формулах* (67.15), *выражающих преобразование координат события* x^0, x^1, x^2, $x^3 = ct, x, y, z$ *при переходе от инерциальной системы* S *к инерциальной системе* S'. Таков будет, в частности, и закон преобразования координат вектора энергии-импульса $E_0\tau^i$.

Простейший пример преобразования (67.15) дают формулы Лоренца (63.7), которые можно переписать в виде

$$x^{0'} = \frac{x^0 - \frac{v}{c}x^1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad x^{1'} = \frac{-\frac{v}{c}x^0 + x^1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad x^{2'} = x^2, \quad x^{3'} = x^3. \tag{67.17}$$

Здесь свободных членов нет, так что эти же формулы дают и закон преобразования (67.16) координат вектора. В частности, подставляя сюда $E_0\tau^i$ вместо x^i, мы получаем *закон преобразования энергии и трех составляющих импульса материальной точки (умноженных на c) при переходе от S к S'*.

Возвращаясь к общему преобразованию (67.16), заметим, что каждая новая координата вектора зависит, вообще говоря, от всех старых, так что энергия в новой системе S' зависит не только от энергии, но и от импульса в системе S; равным образом, и импульс в системе S' зависит не только от импульса, но и от энергии в системе S. В этом и заключается реальный физический смысл объединения энергии и импульса материальной точки в один четырехмерный вектор.

§ 68. Плотность масс, плотность заряда, вектор плотности тока

Чтобы не загромождать последующее изложение деталями, мы произведем в этом параграфе некоторые нужные нам подсчеты.

Когда мы имеем не отдельную частицу, а поток большого числа частиц, то в идеализированном виде представляем себе его как поток непрерывно распределенных в пространстве масс. Обозначим плотность этих масс относительно какой-нибудь инерциальной системы S через μ. Конечно, плотность μ будет различной в разных точках и в разные моменты времени:

$$\mu = \mu(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad (x^0, x^1, x^2, x^3 = ct, x, y, z). \tag{68.1}$$

Далее, в каждой точке и в каждый момент времени поток масс имеет определенный вектор скорости

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x^0, x^1, x^2, x^3). \tag{68.2}$$

Мы должны ожидать, что плотность μ относительно различных инерциальных систем S будет различной, хотя бы мы измеряли ее в том же месте и в тот же момент времени. При этом есть одна инерциальная система, которая будет играть в этом измерении особую роль: это система S_0, движущаяся вместе с потоком, т. е. такая, с точки зрения которой массы покоятся. Разумеется, подобрать систему S_0 так, чтобы относительно системы S_0 покоились вообще все рассматриваемые массы, невозможно, если только мы не берем в качестве потока очень частный случай равномерного и прямолинейного движения твердого тела. Но для *данной точки и данного момента времени* всегда можно подобрать систему S_0, заставив ее двигаться относительно системы S со скоростью $\mathbf{u}$, которую имеет поток в этой точке и в этот момент времени. Тогда элемент массы dm, заключенный в элементе объема $d\omega$ и движущийся вместе с потоком со скоростью $\mathbf{u}$,