сюда $E_0\tau^i$ вместо x^i, мы получаем *закон преобразования энергии и трех составляющих импульса материальной точки (умноженных на c) при переходе от S к S'.*

Возвращаясь к общему преобразованию (67.16), заметим, что каждая новая координата вектора зависит, вообще говоря, от всех старых, так что энергия в новой системе S' зависит не только от энергии, но и от импульса в системе S; равным образом, и импульс в системе S' зависит не только от импульса, но и от энергии в системе S. В этом и заключается реальный физический смысл объединения энергии и импульса материальной точки в один четырехмерный вектор.

§ 68. Плотность масс, плотность заряда, вектор плотности тока

Чтобы не загромождать последующее изложение деталями, мы произведем в этом параграфе некоторые нужные нам подсчеты.

Когда мы имеем не отдельную частицу, а поток большого числа частиц, то в идеализированном виде представляем себе его как поток непрерывно распределенных в пространстве масс. Обозначим плотность этих масс относительно какой-нибудь инерциальной системы S через μ. Конечно, плотность μ будет различной в разных точках и в разные моменты времени:

$$\mu = \mu(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3), \quad (x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3 = ct,\ x,\ y,\ z). \qquad (68.1)$$

Далее, в каждой точке и в каждый момент времени поток масс имеет определенный вектор скорости

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3). \qquad (68.2)$$

Мы должны ожидать, что плотность μ относительно различных инерциальных систем S будет различной, хотя бы мы измеряли ее в том же месте и в тот же момент времени. При этом есть одна инерциальная система, которая будет играть в этом измерении особую роль: это система S_0, движущаяся вместе с потоком, т. е. такая, с точки зрения которой массы покоятся. Разумеется, подобрать систему S_0 так, чтобы относительно системы S_0 покоились вообще все рассматриваемые массы, невозможно, если только мы не берем в качестве потока очень частный случай равномерного и прямолинейного движения твердого тела. Но для *данной точки и данного момента времени* всегда можно подобрать систему S_0, заставив ее двигаться относительно системы S со скоростью $\mathbf{u}$, которую имеет поток в этой точке и в этот момент времени. Тогда элемент массы dm, заключенный в элементе объема $d\omega$ и движущийся вместе с потоком со скоростью $\mathbf{u}$, будет в этот момент покоиться относительно системы S_0 (для краткости мы позволим себе говорить об «элементах» массы и объема без детальных уточнений; по существу речь идет о массе и объеме, заключенных в бесконечно малой окрестности данной точки и рассматриваемых с точностью до бесконечно малых высшего порядка; в частности, тогда массу и объем можно считать пропорциональными между собой).

Относительно системы S_0 наш элемент объема имеет уже другую величину, которую мы обозначим $d\omega_0$. Действительно, поскольку с точки зрения системы S_0 элемент объема покоится, а с точки зрения системы S движется со скоростью $\mathbf{u}$, его продольные размеры с точки зрения системы S сократятся в отношении $\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$, поперечные же размеры не изменяются. В результате объем сократится в отношении $\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$, и мы получаем:

$$d\omega=\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\,d\omega_0. \tag{68.3}$$

Пусть с точки зрения системы S_0 наш элемент массы имеет значение dm_0. Поскольку в системе S_0 он покоится, а относительно системы S имеет скорость $\mathbf{u}$, получаем согласно (67.1)

$$dm=\frac{dm_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}. \tag{68.4}$$

Обозначим через μ_0 плотность масс в данной точке и в данный момент времени с точки зрения системы S_0 (плотность покоя). Конечно, μ_0 зависит от выбранной точки и от выбранного момента времени

$$\mu_0=\mu_0(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3), \tag{68.5}$$

но в отличие от μ является инвариантом — не зависит от выбора инерциальной системы S. По смыслу понятия плотности

$$\mu_0=\frac{dm_0}{d\omega_0},\qquad \mu=\frac{dm}{d\omega}.$$

Вставляя в последнюю формулу выражения (68.3) и (68.4), получаем

$$\mu=\frac{\mu_0}{1-\frac{u^2}{c^2}}. \tag{68.6}$$

Такова важная формула, связывающая плотности масс в системе S_0, где они покоятся, и в системе S, относительно которой они движутся со скоростью $\mathbf{u}$.

Посмотрим теперь, как выглядит картина потока масс с точки зрения пространства событий.

Каждая частица массы, вернее, каждая точка, движущаяся вместе с потоком, обладает четырехмерной траекторией в пространстве событий. Если представлять себе в идеализированном виде, что поток масс заполняет все наше пространство, то *четырехмерные траектории его частиц заполняют все пространство событий, причем через каждую точку пространства событий проходит одна и только одна траектория.*

Действительно, в любой точке и в любой момент времени мы находим частицу массы, движущейся с нашим потоком; вполне определенный процесс ее дальнейшего (и предшествующего) движения изображается вполне определенной четырехмерной траекторией в пространстве событий. Но «любая точка и любой момент времени» означают выбор произвольной точки в пространстве событий, через которую и пройдет эта (единственным образом определенная) траектория.

Построим мнимоединичный касательный вектор $\vec{\tau}$ к каждой четырехмерной траектории потока в каждой ее точке. В результате вектор $\vec{\tau}$ будет построен в каждой точке M пространства событий, и мы получаем *векторное поле в пространстве событий*

$$\vec{\tau}=\vec{\tau}(M), \quad \tau^i=\tau^i(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3). \tag{68.7}$$

Очевидно, по этому векторному полю можно, обратно, восстановить совокупность четырехмерных траекторий потока масс. Связь между координатами τ^i вектора $\vec{\tau}$ в пространстве событий и координатами u_x, u_y, u_z вектора $\mathbf{u}$ (68.2) в обычном пространстве дается формулами (67.11).

Обращает на себя внимание, что в полученной нами картине не нашла себе отражения такая важная характеристика потока, как плотность его масс. Но к этому мы вернемся позже, когда будем заниматься тензором энергии-импульса.

Переходим теперь к другому, хотя и сходному вопросу: рассмотрим поток частиц, несущих электрические заряды; масса частиц интересовать нас не будет. Идеализируя эту картину, можно рассматривать движение непрерывно распределенного в пространстве электрического заряда. Плотность этого заряда, рассматриваемая с точки зрения какой-либо инерциальной системы S, является функцией места и времени:

$$\rho=\rho(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3). \tag{68.8}$$

Аналогично (68.2) обозначим

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3) \tag{68.9}$$

вектор скорости потока электричества с точки зрения системы S. Теперь аналогично предыдущему подберем для данной точки и данного момента времени систему S_0, движущуюся вместе с потоком электричества. Плотность электрического заряда в этой точке и в этот момент времени, измеренную в системе S_0, обозначим ρ_0 (плотность покоя). Конечно, плотность покоя также есть функция места и времени:

$$\rho_0 = \rho_0(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3) \tag{68.10}$$

и аналогично μ_0 представляет собой инвариант (не зависит от выбора инерциальной системы S). По-прежнему для элемента объема имеет место соотношение (68.3) между его величиной $d\omega$ с точки зрения S и его величиной $d\omega_0$ с точки зрения S_0. Обозначим через de элемент заряда, заключенный в этом элементе объема. Элемент заряда будет одинаковым и с точки зрения S и с точки зрения S_0, так как *теория относительности сохраняет классическую точку зрения на заряд как на инвариант, значение которого не зависит от выбора инерциальной системы.*

Плотность электрического заряда с точек зрения систем S и S_0 имеет соответственно значения

$$\rho = \frac{de}{d\omega}, \quad \rho_0 = \frac{de}{d\omega_0},$$

откуда при помощи (68.3) следует:

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \tag{68.11}$$

Так меняется плотность электрического заряда при переходе от системы S_0, относительно которой он покоится, к системе S, относительно которой он движется со скоростью $\mathbf{u}$.

Переходя к геометрическому истолкованию в четырехмерном пространстве событий, воспроизводим прежнюю картину четырехмерных траекторий, но теперь уже для частиц заряда, вернее, для точек, движущихся вместе с потоком электричества. По-прежнему через каждую точку пространства событий проходит одна и только одна четырехмерная траектория, и ее мнимоединичный касательный вектор $\vec{\tau}$ образует поле (68.7) в этом пространстве. Связь с вектором скорости $\mathbf{u}$ (68.9) по-прежнему дается формулами (67.11). Но теперь мы пойдем дальше. Умножим вектор $\vec{\tau}$ на плотность покоя ρ_0 и обозначим полученный вектор через $\mathbf{s}$:

$$\mathbf{s} = \rho_0 (x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3) \vec{\boldsymbol{\tau}} (x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3). \qquad (68.12)$$

Подчеркнем, что векторное поле $\mathbf{s}$ в пространстве событий является инвариантным, т. е. не зависит от выбора инерциальной системы S, так как инвариантны оба множителя, при помощи которых оно получено.

Вектор $\mathbf{s}$ *мы будем называть четырехмерным вектором плотности тока.* Смысл этого названия выяснится, если рассмотреть *координаты вектора в ортонормированном репере* $\mathfrak{R}$, *изображающем какую-нибудь систему* S.

Пользуясь (67.11), получаем:

$$s^0 = \rho_0 \tau^0 = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \qquad s^1 = \rho_0 \tau^1 = \frac{\rho_0 u_x}{c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \quad \text{и т. д.},$$

а пользуясь (68.11), получаем окончательно:

$$s^0 = \rho, \quad s^1 = \rho \frac{u_x}{c}, \qquad s^2 = \rho \frac{u_y}{c}, \qquad s^3 = \rho \frac{u_z}{c}. \qquad (68.13)$$

Таким образом, нулевая координата вектора $\mathbf{s}$ *выражает плотность заряда, а три остальные (после умножения на* c*) — значения плотности тока в направлениях координатных осей* X, Y, Z *— все это относительно данной инерциальной системы* S.

Плотностью тока, например, в направлении оси X мы называем количество электричества, протекающее за бесконечно малый промежуток времени ε через бесконечно малую площадку dS, ортогональную к оси X, отнесенное к единице площади и к единице времени и взятое в пределе. Плотность тока мы считаем положительной, если ток течет в положительную сторону оси X. Легко подсчитать, что поскольку плотность электричества ρ, а движется оно в направлении оси X со скоростью u_x, то плотность тока в направлении оси X равна ρu_x и аналогично для других осей. Очевидно, ρu_x зависит от момента времени и от места, где выбрана площадка dS, т. е. от x^0, x^1, x^2, x^3.

Итак, плотность заряда и три значения плотности тока в направлениях осей X, Y, Z (деленные на c) оказались координатами одного инвариантного четырехмерного вектора.

Реальный физический смысл этого утверждения заключается в том, что мы можем указать закон преобразования этих четырех величин при переходе от одной инерциальной системы к другой. Здесь можно повторить все сказанное в конце § 67 относительно координат вектора энергии-импульса.