§ 69. Электромагнитное поле

В этом параграфе мы покажем, как электромагнитное поле находит изображение в пространстве событий в виде определенного тензорного поля. Начнем с того, что будем наблюдать электромагнитное поле (в пустоте) относительно какой-нибудь инерциальной системы S. Пусть $\mathbf{E}(E_x, E_y, E_z)$ будет напряженность электрического и $\mathbf{H}(H_x, H_y, H_z)$ — напряженность магнитного поля. Для простоты будем считать эти векторы постоянными в рассматриваемой малой области пространства и за малый промежуток времени.

Если у нас имеется частица, несущая заряд e и движущаяся со скоростью $\mathbf{u}$, то в электромагнитном поле на нее действует сила по закону Лоренца:

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{uH}]. \tag{69.1}$$

Согласно общей установке теории относительности мы предполагаем, что этот закон действует в любой инерциальной системе.

Пусть наша частица имеет (переменную) массу m. Тогда, пользуясь вторым законом Ньютона в форме (67.2), можно записать:

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{u}) = e\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{uH}]\right\}. \tag{69.2}$$

Проектируя это равенство почленно на координатные оси, получим:

$$\frac{d}{dt}(mu_x) = e\left\{E_x + \frac{1}{c}(u_yH_z - u_zH_y)\right\}$$

и две аналогичные формулы, получаемые из этой круговой подстановкой x, y, z.

Умножая почленно на $c\,dt$ и учитывая, что $u_x = \frac{dx}{dt}$, $u_y = \frac{dy}{dt}$, $u_z = \frac{dz}{dt}$, получим:

$$d(mu_xc) = e\{E_xc\,dt + dy\,H_z - dz\,H_y\} \tag{69.3}$$

и две аналогичные формулы.

Переходим теперь в пространство событий, где нашей инерциальной системе S отвечает ортонормированная координатная система $x^0, x^1, x^2, x^3 = ct, x, y, z$. При этом движение частицы изображается четырехмерной траекторией с мнимоединичным касательным вектором $\vec{\tau}$, при помощи которого мы составляли вектор энергии-импульса $E_0\vec{\tau}$, где E_0 — энергия покоя. Согласно (67.13)

$$mu_x c = E_0\tau^1 \text{ и т. д.,}$$

так что (69.3) и две аналогичные формулы можно переписать так:

$$\left.\begin{aligned} d(E_0\tau^1) &= e\{E_x dx^0 + H_z dx^2 - H_y dx^3\},\\ d(E_0\tau^2) &= e\{E_y dx^0 - H_z dx^1 + H_x dx^3\},\\ d(E_0\tau^3) &= e\{E_z dx^0 + H_y dx^1 - H_x dx^2\}.\end{aligned}\right\} \tag{69.4}$$

К этим формулам следует прибавить еще одну, выражающую дифференциал энергии частицы,— пока мы выразили лишь дифференциалы трех проекций ее импульса (умноженные на c). Но дифференциал энергии mc^2 равен элементу работы, совершенной над частицей силами поля:

$$d(mc^2) = e\{E_x dx + E_y dy + E_z dz\}. \tag{69.5}$$

Обращает на себя внимание, что в правой части записана работа, произведенная лишь силами электрического поля; это потому, что магнитное поле, как видно из (69.1), дает силу, ортогональную к направлению движения частицы (к вектору скорости $\mathbf{u}$), и потому работы не производит.

Пользуясь формулами (67.12), запишем окончательно:

$$d(E_0\tau^0) = e\{E_x dx + E_y dy + E_z dz\}. \tag{69.6}$$

Теперь объединим формулы (69.4), (69.6), поставив на первое место (69.6). Мы видим, что эти формулы выражают линейную зависимость координат вектора $d(E_0\vec{\tau})$ от координат dx^i вектора $d\mathbf{x}$, где $\mathbf{x}$ — текущий радиус-вектор четырехмерной траектории частицы в пространстве событий. Оба дифференциала $d\mathbf{x}$, $d(E_0\vec{\tau})$ берутся при бесконечно малом смещении по четырехмерной траектории.

Формулы (69.6), (69.4) становятся более прозрачными, если перейти к *ковариантным* координатам вектора $d(E_0\vec{\tau})$.

Согласно (42.24) для любого вектора $\mathbf{x}$ в ортонормированной координатной системе в пространстве событий мы имеем:

$$x_0 = -x^0, \quad x_\lambda = x^\lambda \quad (\lambda = 1, 2, 3), \tag{69.7}$$

так как в этом случае $\mathbf{e}_0^2 = -1$, $\mathbf{e}_\lambda^2 = 1$. Применяя эти формулы к $\overrightarrow{E_0\tau}$, мы перепишем (69.6), (69.4) в виде

$$\left.\begin{aligned} d(E_0\tau_0) &= e\{ \qquad\quad -E_x dx^1 - E_y dx^2 - E_z dx^3 \},\\ d(E_0\tau_1) &= e\{E_x dx^0 \qquad\qquad + H_z dx^2 - H_y dx^3\},\\ d(E_0\tau_2) &= e\{E_y dx^0 - H_z dx^1 \qquad\qquad + H_x dx^3\},\\ d(E_0\tau_3) &= e\{E_z dx^0 + H_y dx^1 - H_x dx^2 \qquad\qquad \}. \end{aligned}\right\} \tag{69.8}$$

Мы замечаем, что матрица линейного преобразования dx^i в $d(E_0\tau_i)$ является *кососимметрической* и, если отбросить множитель e и обозначить ее элементы через F_{ij}, имеет следующий вид:

$$\begin{Vmatrix} F_{00} & F_{01} & F_{02} & F_{03}\\ F_{10} & F_{11} & F_{12} & F_{13}\\ F_{20} & F_{21} & F_{22} & F_{23}\\ F_{30} & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z\\ E_x & 0 & H_z & -H_y\\ E_y & -H_z & 0 & H_x\\ E_z & H_y & -H_x & 0 \end{Vmatrix}. \tag{69.9}$$

Очевидно, $F_{ij} = -F_{ji}$. Пользуясь индексными обозначениями, формулы (69.8) можно переписать в виде

$$d(E_0\tau_i) = eF_{ij}\,dx^j. \tag{69.10}$$

Разберемся в смысле полученного результата. При бесконечно малом смещении по четырехмерной траектории заряженной частицы (рис. 15) мы рассмотрим дифференциал $d\mathbf{x}$ радиуса-вектора $\mathbf{x}$ (его контравариантные координаты dx^i) и дифференциал $d(\overrightarrow{E_0\tau})$ вектора энергии-импульса $\overrightarrow{E_0\tau}$ (его ковариантные координаты $d(E_0\tau_i)$).

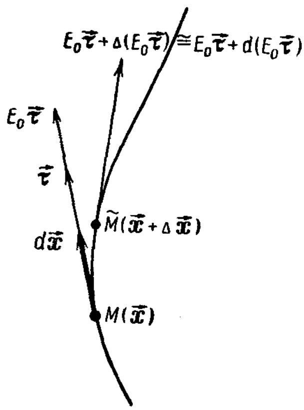

Рис. 15.

Причиной того, что $d(\overrightarrow{E_0\tau})$ вообще существует (т. е. не равен нулю), является электромагнитное поле, действующее на заряженную частицу; если бы частица не подвергалась действию сил, то мы имели бы

$$d(\overrightarrow{E_0\tau}) = 0,$$

т. е. вектор энергии-импульса $\overrightarrow{E_0\tau}$ оставался бы постоянным, и четырехмерная траектория, как легко следует из $\vec{\tau} = \text{const}$, была бы прямолинейной. При этом *в одном и том же электромагнитном поле* мы можем заставить заряженную частицу двигаться по разным направлениям с разными скоростями, т. е. можем *варьировать четырехмерную траекторию. Тогда вектор* $d\mathbf{x}$ *будет принимать различные значения, а* $d(E_0\vec{\tau})$ *будет меняться в зависимости от* $d\mathbf{x}$. Так как координаты вектора $d(E_0\vec{\tau})$ при этом линейно зависят от координат вектора $d\mathbf{x}$, то $d(E_0\vec{\tau})$ получается из $d\mathbf{x}$ действием некоторого аффинора (§ 3), который, отбрасывая множитель e, мы обозначим $\mathfrak{F}$. Итак,

$$d(E_0\vec{\tau}) = e\mathfrak{F}\,d\mathbf{x}. \tag{69.11}$$

Формулы (69.10) выражают зависимость *ковариантных координат* вектора-функции от контравариантных координат вектора-аргумента, так что коэффициенты F_{ij} аффинора $\mathfrak{F}$ образуют согласно (40.10) дважды ковариантный (и при этом кососимметрический) тензор. *Тензор* F_{ij} *называется тензором электромагнитного поля. Таким образом, составляющие электрического и магнитного полей, рассматриваемые относительно какой-либо инерциальной системы* S, *образуют по схеме* (69.9) *координаты дважды ковариантного кососимметрического тензора* F_{ij}, *вычисленные в соответствующей ортонормированной системе координат в пространстве событий.*

Реальный физический смысл этого результата заключается в том, что он дает возможность пересчитывать электромагнитное поле, заданное в одной инерциальной системе S, на любую другую инерциальную систему S'. Для этого составляющие электромагнитного поля, записанные по схеме (69.9), нужно подвергнуть преобразованию по тензорному закону

$$F_{i'j'} = A^i_{i'}A^j_{j'}F_{ij}. \tag{69.12}$$

Здесь $A^i_{i'}$ — псевдоортогональная матрица (см. (62.11)), выражающая переход от ортонормированной системы, отвечающей S, к системе, отвечающей S':

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{e}_i.$$

Если нам задан переход от S к S' формулами

$$x^{i'} = A^{i'}_i x^i + A^{i'}$$

(где x^0, x^1, x^2, $x^3 = ct$, x, y, z), то обратную матрицу $A^i_{i'}$ мы сейчас же получаем согласно (62.11). В простейшем случае, когда переход задается формулами Лоренца (67.17), эта матрица имеет вид

$$\left\| \begin{matrix} A_{0'}^{0} & A_{0'}^{1} & A_{0'}^{2} & A_{0'}^{3} \\ A_{1'}^{0} & A_{1'}^{1} & A_{1'}^{2} & A_{1'}^{3} \\ A_{2'}^{0} & A_{2'}^{1} & A_{2'}^{2} & A_{2'}^{3} \\ A_{3'}^{0} & A_{3'}^{1} & A_{3'}^{2} & A_{3'}^{3} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \dfrac{v}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \dfrac{v}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|. \qquad (69.13)$$

Применяя ее в формуле (69.12), получаем, например:

$$E'_y = F_{2'0'} = A_{2'}^{i} A_{0'}^{j} F_{ij} = A_{2'}^{2} A_{0'}^{0} F_{20} + A_{2'}^{2} A_{0'}^{1} F_{21} =$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} E_y + 1 \cdot \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(-H_z) = \frac{E_y - \frac{v}{c} H_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (69.14)$$

В процессе суммирования по i, j мы не выписывали членов, равных нулю. Аналогично можно вычислить любую составляющую электромагнитного поля относительно системы S'.

Мы рассматривали электромагнитное поле для простоты в малом участке пространства и в течение малого промежутка времени, т. е. в малой области четырехмерного пространства событий, и считали его в этой области постоянным. В действительности же напряженности электрического и магнитного полей зависят от места и времени, так что тензор F_{ij} должен быть задан в каждой точке пространства событий, и мы получаем тензорное поле

$$F_{ij} = F_{ij}(x^0, x^1, x^2, x^3). \qquad (69.15)$$

Этим тензорным полем мы и будем в дальнейшем заниматься.

§ 70. Уравнения Максвелла

Еще до появления теории относительности краеугольным камнем электродинамики служили *уравнения Максвелла*. Пусть $\mathbf{E}(t, x, y, z)$, $\mathbf{H}(t, x, y, z)$ будут соответственно электрическое и магнитное векторные поля, рассматриваемые относительно «покоящейся» системы отсчета S. Тогда первая группа уравнений Максвелла связывает эти поля друг с другом

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \qquad (70.1)$$