вид

$$\left\|\begin{matrix} A_{0'}^{0} & A_{0'}^{1} & A_{0'}^{2} & A_{0'}^{3} \\ A_{1'}^{0} & A_{1'}^{1} & A_{1'}^{2} & A_{1'}^{3} \\ A_{2'}^{0} & A_{2'}^{1} & A_{2'}^{2} & A_{2'}^{3} \\ A_{3'}^{0} & A_{3'}^{1} & A_{3'}^{2} & A_{3'}^{3} \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{v}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \frac{v}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|. \tag{69.13}$$

Применяя ее в формуле (69.12), получаем, например:

$$E'_y = F_{2'0'} = A_{2'}^{i} A_{0'}^{j} F_{ij} = A_{2'}^{2} A_{0'}^{0} F_{20} + A_{2'}^{2} A_{0'}^{1} F_{21} =$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} E_y + 1 \cdot \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} (-H_z) = \frac{E_y - \frac{v}{c} H_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{69.14}$$

В процессе суммирования по i, j мы не выписывали членов, равных нулю. Аналогично можно вычислить любую составляющую электромагнитного поля относительно системы S'.

Мы рассматривали электромагнитное поле для простоты в малом участке пространства и в течение малого промежутка времени, т. е. в малой области четырехмерного пространства событий, и считали его в этой области постоянным. В действительности же напряженности электрического и магнитного полей зависят от места и времени, так что тензор F_{ij} должен быть задан в каждой точке пространства событий, и мы получаем тензорное поле

$$F_{ij} = F_{ij}(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3). \tag{69.15}$$

Этим тензорным полем мы и будем в дальнейшем заниматься.

§ 70. Уравнения Максвелла

Еще до появления теории относительности краеугольным камнем электродинамики служили *уравнения Максвелла*. Пусть $\mathbf{E}(t, x, y, z)$, $\mathbf{H}(t, x, y, z)$ будут соответственно электрическое и магнитное векторные поля, рассматриваемые относительно «покоящейся» системы отсчета S. Тогда первая группа уравнений Максвелла связывает эти поля друг с другом

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \tag{70.1}$$

а вторая группа связывает их, кроме того, с распределением и движением электричества в пространстве:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\rho\mathbf{u}. \tag{70.2}$$

Здесь

$$\rho = \rho(t, x, y, z)$$

есть плотность электрического заряда, а

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x, y, z)$$

— вектор скорости его движения в данной точке и в данный момент времени. Уравнения Максвелла записаны у нас для пустоты.

Как уже указывалось, законы электродинамики, т. е. в основном уравнения Максвелла, *с классической точки зрения неинвариантны относительно перехода от одной инерциальной системы к другой* и должны нарушаться в «движущейся» системе S'. Опыт же показал противное, и теория относительности возникла как разрешение этого противоречия. Сейчас мы покажем, что, действительно, *с точки зрения теории относительности имеет место инвариантность уравнений Максвелла,* т. е. если эти уравнения справедливы в одной инерциальной системе S, то они справедливы и в любой другой системе S'.

Для этой цели мы должны истолковать уравнения Максвелла с точки зрения четырехмерного пространства событий как ограничения, наложенные на выбор тензорных полей F_{ij} (электромагнитное поле) и s^i (поле вектора четырехмерной плотности тока). Займемся сначала первой группой уравнений Максвелла (70.1). Дадим эти уравнения в развернутой координатной записи (проектируя второе из них на координатные оси X, Y, Z):

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t},$$

и еще две формулы, получающиеся из последней круговой подстановкой x, y, z. Пользуясь теперь таблицей (69.9), а также обозначениями x^0, x^1, x^2, $x^3 = ct$, x, y, z, получаем:

$$\frac{\partial F_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x^3} = 0, \tag{70.3}$$

$$\frac{\partial F_{30}}{\partial x^2} - \frac{\partial F_{20}}{\partial x^3} = -\frac{\partial F_{23}}{\partial x^0} \tag{70.4}$$

и еще две формулы, получающиеся из последней круговой подстановкой 1, 2, 3.

Пользуясь косой симметрией $F_{ij}=-F_{ji}$, можно записать (70.4) в более симметричном виде, перенося все члены в левые части:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F_{30}}{\partial x^2}+\frac{\partial F_{02}}{\partial x^3}+\frac{\partial F_{23}}{\partial x^0}=0,\\ \frac{\partial F_{10}}{\partial x^3}+\frac{\partial F_{03}}{\partial x^1}+\frac{\partial F_{31}}{\partial x^0}=0,\\ \frac{\partial F_{20}}{\partial x^1}+\frac{\partial F_{01}}{\partial x^2}+\frac{\partial F_{12}}{\partial x^0}=0.\end{aligned}\right\} \tag{70.5}$$

Мы замечаем, что четыре формулы (70.5), (70.3), к которым свелась первая группа уравнений Максвелла, имеют однотипное строение и допускают общую запись с буквенными индексами:

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k}+\frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial F_{ki}}{\partial x^j}=0. \tag{70.6}$$

Заметим, что левая часть этого уравнения кососимметрична по всем трем своим индексам: если переставить между собой, например, индексы k, i, то последний член меняет знак, первый член превращается во второй и наоборот, в обоих случаях с изменением знака (все это в силу косой симметрии тензора F_{ij}). При этом формулы (70.5), (70.3) исчерпывают *все случаи*, когда i, j, k представляют собой тройку *различных* индексов из числа индексов 0, 1, 2, 3. В самом деле, задавшись индексами, например, 1, 2, 3 и написав соответствующее уравнение (70.3), сделаем в нем над индексами 1, 2, 3 какую-нибудь подстановку, в силу косой симметрии левая часть или не меняется или меняет лишь знак, и смысл уравнения не изменится. Если же среди индексов i, j, k имеются хотя бы два одинаковых, то в силу косой симметрии левой части (70.6) она тождественно обращается в нуль, и (70.6) вместо уравнения дает тождество.

Таким образом, уравнения (70.5), (70.3) равносильны уравнениям (70.6), рассматриваемым при всех комбинациях индексов.

Первая группа уравнений Максвелла в четырехмерном пространстве событий записывается в виде дифференциальных уравнений (70.6), *наложенных на тензорное поле* F_{ij}.

Теперь тензорный характер, а вместе с ним и инвариантность этих уравнений становятся очевидными. Действительно, в § 38 мы выяснили, что в результате частного дифференцирования тензора поля по координатам точки получается поле нового тензора с добавочным ковариантным индексом. В нашем случае частные производные $\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k}$ образуют трижды ковариантный тензор

$$F_{ijk}=\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k},$$

вследствие чего образуют тензор и величины

$$\Lambda_{ijk}=F_{ijk}+F_{jki}+F_{kij}.$$

Действительно, тензор Λ_{ijk} получается сложением трех трижды ковариантных тензоров (отличающихся друг от друга лишь круговыми подстановками индексов). Теперь уравнения (70.6) принимают вид

$$\Lambda_{ijk}=0.$$

Но по характеру тензорного закона преобразования обращение тензора Λ_{ijk} (т. е. всех его координат) в нуль в одной координатной системе влечет то же самое и в любой другой координатной системе. Поэтому уравнения (70.6), установленные в одной координатной системе, будут справедливы и в любой другой. При этом можно брать не обязательно ортонормированные, но и любые аффинные координатные системы. Однако для нас важны именно ортонормированные системы, так как инвариантность при их преобразовании означает инвариантность при переходе от одной инерциальной системы S к любой другой S'.

Теперь займемся второй группой уравнений Максвелла (70.2). Перепишем их в развернутой форме:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=4\pi\rho,$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}=\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\rho u_x$$

и еще два уравнения, получающихся из последнего круговой подстановкой x, y, z.

Пользуясь таблицей (69.9) и формулами (68.13), получаем:

$$\frac{\partial F_{10}}{\partial x^1}+\frac{\partial F_{20}}{\partial x^2}+\frac{\partial F_{30}}{\partial x^3}=4\pi s^0, \tag{70.7}$$

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x^2}-\frac{\partial F_{31}}{\partial x^3}=\frac{\partial F_{10}}{\partial x^0}+4\pi s^1 \tag{70.8}$$

и еще два уравнения, получающихся в результате круговой подстановки 1, 2, 3. Перенося все производные в левую часть и пользуясь косой симметрией F_{ij}, можно написать вместо (70.8)

$$-\frac{\partial F_{10}}{\partial x^0}+\frac{\partial F_{12}}{\partial x^2}+\frac{\partial F_{13}}{\partial x^3}=4\pi s^1 \tag{70.9}$$

и еще два уравнения, получающихся из этого круговой подстановкой 1, 2, 3.

Итак, вторая группа уравнений Максвелла свелась к (70.7) и (70.9). Однако тензорный характер наших уравнений в этой записи еще неясен. Чтобы его обнаружить, нужно перейти к контравариантной записи тензора F_{ij}, подняв оба его индекса при помощи контравариантного метрического тензора g^{ij} (§ 40):

$$F^{ij} = g^{ip}g^{jq}F_{pq}. \qquad (70.10)$$

Здесь по p и q происходит суммирование. Очевидно, косая симметрия сохранится и после поднятия индексов.

В самом деле, переставив индексы i, j в формуле (70.10), мы можем также поменять и обозначения индексов суммирования p, q, что не играет никакой роли для результата. Получим:

$$F^{ji} = g^{jq}g^{ip}F_{qp}.$$

Сравнивая с (70.10), получаем:

$$F^{ji} = -F^{ij},$$

так как $F_{qp} = -F_{pq}$. В пространстве событий для ортонормированного репера все координаты метрического тензора $g_{ij} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ равны нулю кроме

$$g_{00} = -1, \quad g_{\lambda\lambda} = 1 \quad (\lambda = 1,\ 2,\ 3). \qquad (70.11)$$

Координаты контравариантного метрического тензора g^{ij} образуют матрицу, обратную матрице g_{ij}, следовательно, в данном случае просто с ней совпадающую:

$$g^{00} = -1, \quad g^{\lambda\lambda} = 1 \quad (\lambda = 1,\ 2,\ 3); \quad g^{ij} = 0 \ (i \neq j). \qquad (70.12)$$

Поэтому при суммировании по p, q в (70.10) следует сохранить лишь слагаемые, где $p = i$, $q = j$, и мы получаем:

$$F^{ij} = g^{ii}g^{jj}F_{ij} \quad \text{(без суммирования)}. \qquad (70.13)$$

Это значит, согласно (70.12), что если оба индекса i, j равны нулю или оба отличны от нуля, то $g^{ii}g^{jj} = 1$ и $F^{ij} = F_{ij}$; если же один из них нуль, а другой отличен от нуля, то $g^{ii}g^{jj} = -1$ и $F^{ij} = -F_{ij}$. Итак,

$$F^{00} = F_{00}, \quad F^{\lambda\mu} = F_{\lambda\mu}, \quad F^{0\lambda} = -F_{0\lambda} \quad (\lambda,\ \mu = 1,\ 2,\ 3). \qquad (70.14)$$

Перепишем теперь уравнение (70.7), заменяя $F_{\lambda 0}$ через $-F_{0\lambda}$, а затем через $F^{0\lambda}$:

$$\frac{\partial F^{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{03}}{\partial x^3} = 4\pi s^0. \qquad (70.15)$$

В уравнении (70.9) заменяем $-F_{10}$ через F^{10}; F_{12}, F_{13} заменяются просто через F^{12}, F^{13}. Получаем, присоединяя еще два уравнения, получающихся круговой подстановкой 1, 2, 3:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F^{10}}{\partial x^0}+\frac{\partial F^{12}}{\partial x^2}+\frac{\partial F^{13}}{\partial x^3}&=4\pi s^1,\\ \frac{\partial F^{20}}{\partial x^0}+\frac{\partial F^{23}}{\partial x^3}+\frac{\partial F^{21}}{\partial x^1}&=4\pi s^2,\\ \frac{\partial F^{30}}{\partial x^0}+\frac{\partial F^{31}}{\partial x^1}+\frac{\partial F^{32}}{\partial x^2}&=4\pi s^3. \end{aligned}\right\} \tag{70.16}$$

Итак, вторая группа уравнений Максвелла сводится к (70.15), (70.16). Эти четыре уравнения можно объединить в тензорной записи:

$$\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^j}=4\pi s^i. \tag{70.17}$$

В левой части происходит суммирование по j. Легко проверить, что, действительно, при $i=0$, 1, 2, 3 мы получаем соответственно формулы (70.15) и (70.16). Для этого достаточно написать в каждом случае суммирование по j в развернутом виде, учитывая, что в каждой сумме выпадает один член, равный нулю (именно, при $j=i$, когда $F^{ii}=0$).

Так как частные производные дважды контравариантного тензора $\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^k}$ образуют тензор дважды контравариантный и один раз ковариантный, то суммирование по j можно рассматривать как свертывание тензора $\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^k}$ по второму верхнему и нижнему индексам. Но в результате свертывания тензора получается снова тензор, в нашем случае с одним верхним индексом i. Таким образом (70.17) означает равенство двух контравариантных тензоров 1-й валентности. Но такое равенство, справедливое в одной координатной системе, будет справедливо и в любой другой ввиду одинакового закона преобразования левой и правой частей. Тем самым, и вторая пара уравнений Максвелла имеет место в любой инерциальной системе S, если она имеет место в одной из них.

Таким образом, мы показали, как теория относительности выполняет свою основную задачу — обеспечить инвариантность уравнений Максвелла (70.6), (70.17), т. е. *инвариантность законов электродинамики, установленную ранее на опыте.*

Из (70.17) и из кососимметричности F^{ij} легко следует, что

$$\frac{\partial s^i}{\partial x^i}=0,$$

т. е. четырехмерная дивергенция векторного поля s^i равна нулю. Физический смысл этого соотношения — закон сохранения заряда;

приращение заряда в какой-либо трехмерной области ω, выделенной в какой-нибудь инерциальной системе S, всегда равно заряду, втекшему за то же время через границу Π области ω (вывод совершенно такой же, как и в случае (72.8)).

Отметим без доказательства, что из уравнений (70.6) следует существование один раз ковариантного тензорного поля

$$f_i(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3),$$

такого, что

$$F_{ij}=\frac{\partial f_j}{\partial x^i}-\frac{\partial f_i}{\partial x^j}. \tag{70.18}$$

Тензор f_i можно геометрически представить в виде вектора $\mathfrak{f}$ с ковариантными координатами f_i, так что поле тензора f_i истолкуется как векторное поле $\mathfrak{f}$. *Вектор* $\mathfrak{f}$ *называется четырехмерным потенциалом электромагнитного поля*; напряженность электромагнитного поля F_{ij} получается из него, как мы видим, операцией, сходной с построением ротора данного векторного поля в обычном пространстве. Но теперь дело происходит в четырехмерном пространстве, и мы получаем в результате не вектор, а бивектор (кососимметрический тензор) F_{ij}. Впрочем и в обычном пространстве при построении ротора мы получаем по существу сначала бивектор (кососимметрический аффинор, см. § 5), который уже затем условно переделываем в вектор, для чего существенно используется трехмерный характер пространства.

Обратно, из формул (70.18) немедленно вытекают уравнения (70.6), в чем легко убедиться прямой проверкой.

Заметим еще, что четырехмерный потенциал f_i данного электромагнитного поля определяется неоднозначно: из вида формул (70.18) легко вытекает, что к f_i можно добавлять любой *градиентный тензор*

$$\varphi_i=\frac{\partial\varphi}{\partial x^i},$$

где φ — произвольное скалярное поле. Действительно, формулы (70.18) при этом не нарушаются.

Произвол в выборе четырехмерного потенциала существенно уменьшается, если на него наложить, как обычно делают, инвариантное добавочное условие

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^i}=0. \tag{70.19}$$

Здесь по i происходит суммирование, так что нулю приравнивается инвариант, полученный полным свертыванием тензора $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$. Под f^i мы понимаем тензор, полученный поднятием индекса у тензора f_i, или, что то же, контравариантные координаты вектора $\mathfrak{f}$.