§ 71. Тензор энергии-импульса

Допустим, что нас интересует общая картина распределения и движения энергии и импульса в пространстве и времени. Как мы далее увидим, для ее описания мы должны построить в четырехмерном пространстве событий соответствующим образом подобранный дважды контравариантный симметрический тензор T^{ij} — *тензор энергии-импульса.*

Этот тензор задается в каждой точке пространства событий, так что получается тензорное поле

$$T^{ij} = T^{ij}(M). \tag{71.1}$$

Конечно, этим еще ничего не сказано о том, как тензор энергии-импульса строится и как он связан с распределением и движением энергии и импульса. Но мы начнем с рассмотрения *частного случая* тензора энергии-импульса, общее же его определение дадим потом.

1°. *Тензор энергии-импульса потока масс.* Рассмотрим поток масс так, как мы это делали в § 68, и сохраняя все прежние обозначения. В каждой точке M пространства событий мы имеем мнимоединичный касательный вектор $\vec{\tau}$ (68.7) к четырехмерной траектории потока и плотность покоя μ_0 (68.5):

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}(M), \quad \mu_0 = \mu_0(M). \tag{71.2}$$

Координаты τ^i вектора $\vec{\tau}$ образуют один раз контравариантный тензор. Перемножая этот тензор с самим собой и с инвариантом $c^2\mu_0$, мы получим симметрический дважды контравариантный тензор, который обозначим

$$T^{ij} = \mu_0 c^2 \tau^i \tau^j \tag{71.3}$$

и будем называть *тензором энергии-импульса потока масс.* Что мы хотим сказать этим названием, станет ясным, если *рассмотреть координаты тензора T^{ij} в какой-либо ортонормированной системе x^0, x^1, x^2, x^3 и раскрыть их физический смысл с точки зрения соответствующей инерциальной системы S.* Подразумевается, что T^{ij} берутся в определенной точке пространства событий, и соответственно их физический смысл истолковывается в определенный момент времени и в определенной точке обычного пространства (с точки зрения системы S).

Для этой цели нам будут нужны формулы (67.11), дающие связь между координатами τ^i и скоростью движения масс $\mathbf{u}(u_x, u_y, u_z)$

относительно системы S:

$$\left.\begin{aligned} \tau^0 &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, & \tau^1 &= \frac{u_x}{c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \\ \tau^2 &= \frac{u_y}{c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, & \tau^3 &= \frac{u_z}{c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right\} \tag{71.4}$$

Кроме того, мы используем формулу (68.6):

$$\mu = \frac{\mu_0}{1-\frac{u^2}{c^2}}, \tag{71.5}$$

дающую связь между плотностью покоя μ_0 и плотностью μ с точки зрения S.

Вычисляем T^{00}:

$$T^{00} = \mu_0 c^2 \tau^0 \tau^0 = \frac{\mu_0 c^2}{1-\frac{u^2}{c^2}} = \mu c^2. \tag{71.6}$$

Так как μ есть плотность масс, то *μc^2 выражает, следовательно, плотность энергии в нашем потоке.* Здесь и в дальнейшем все физические величины измеряются относительно системы S.

Вычисляем теперь $T^{01} = T^{10}$:

$$T^{01} = \mu_0 c^2 \tau^0 \tau^1 = \mu_0 c^2 \frac{u_x}{c\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)} = \mu u_x c.$$

Аналогичные выражения получаем и для T^{02}, T^{03}. В результате

$$T^{01} = \mu u_x c, \quad T^{02} = \mu u_y c, \quad T^{03} = \mu u_z c. \tag{71.7}$$

Физический смысл этого результата двоякий. Во-первых, раз плотность масс μ, а скорость их движения $\mathbf{u}(u_x, u_y, u_z)$, то *плотность импульса будет равна* $\mu\mathbf{u}$. Этим мы хотим сказать, что, умножая $\mu\mathbf{u}$ на элемент объема $d\omega$, мы получаем (пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка) импульс, заключенный в $d\omega$. Действительно, $\mu\, d\omega$ дает, по определению плотности, массу, заключенную в $d\omega$, а следовательно, $\mu\, d\omega\, \mathbf{u}$ дает соответствующий импульс (пренебрегая в обоих случаях бесконечно малыми высшего порядка). Аналогично плотности проекций импульса на оси X, Y, Z будут равны:

$$\mu u_x, \ \mu u_y, \ \mu u_z. \tag{71.8}$$

Этим мы хотим сказать, что, умножая, например, μu_x на $d\omega$, мы получаем проекцию импульса, заключенного в $d\omega$, на ось X. Действительно, $\mu u_x d\omega$ есть проекция вектора $\mu\, d\omega\, \mathbf{u}$ на ось X.

Таким образом, координаты $T^{0\lambda}$ ($\lambda = 1, 2, 3$) *совпадают с умноженными на с плотностями проекций импульса на оси* X, Y, Z.

Во-вторых, координатам $T^{0\lambda}$ можно дать такое истолкование Пусть в данной точке помещена бесконечно малая площадка dS, направленная ортогонально к оси X. Назовем *плотностью потока энергии* в направлении оси X (в данной точке и в данный момент времени) количество энергии, протекшее через dS за бесконечно малый промежуток времени ε, *отнесенное к единице площади и к единице времени и взятое в пределе*. Этой плотности приписывается знак плюс, если энергия течет в положительную сторону оси, и минус — в противном случае. Так как плотность энергии μc^2, а движется она в направлении оси X со скоростью u_x, то плотность ее потока в этом направлении будет равна $\mu c^2 u_x$, как легко показать элементарным подсчетом. Аналогичным образом определяется и вычисляется плотность потока и любой другой физической величины, распределенной в пространстве и переносимой вместе с нашим потоком масс.

Итак, значения плотности потока энергии в направлениях координатных осей равны:

$$\mu c^2 u_x, \quad \mu c^2 u_y, \quad \mu c^2 u_z, \tag{71.9}$$

и следовательно, они совпадают с

$$cT^{01}, \ cT^{02}, \ cT^{03}. \tag{71.10}$$

В этом состоит второе истолкование координат $T^{0\lambda}$ ($\lambda = 1, 2, 3$).

Для дальнейшего важно отметить следующий результат. *Вычисленный в данный момент* t *поток векторного поля* $\mu c^2 \mathbf{u}$ *через какую-нибудь (двустороннюю) поверхность* Π *равен скорости* q^0 *протекания энергии через эту поверхность в этот же момент* t:

$$q^0 = \iint\limits_{\Pi} \mu c^2 \,\mathbf{un}\, dS. \tag{71.11}$$

При этом q^0 мы называем скоростью протекания энергии через Π в данный момент t, если *за бесконечно малый промежуток времени* ε, *начиная от данного момента* t, *количество энергии, протекшей через* Π *в сторону* $+\mathbf{n}$, *равно* εq^0 *(пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка)*. Грубый вывод этого результата получается совершенно так же, как и в случае (16.3) с заменой лишь плотности жидкости ρ плотностью энергии μc^2. Правда, в случае (16.3) движение было стационарным, чего в данном случае не предполагается. Но для вывода это не играет роли, так как в нем рассматривается лишь бесконечно малый промежуток времени ε. Скорость протекания энергии через Π q^0 будет в нашем случае, вообще говоря, зависеть от времени; в стационарном случае она будет постоянной.

В дальнейшем мы будем говорить о скорости протекания через поверхность П и пользоваться формулой (71.11) и для других физических величин совершенно аналогично тому, как сейчас мы делали это для энергии (предполагая, что эти величины тоже с известной плотностью распределены в пространстве и перемещаются вместе с нашим потоком масс).

Переходим теперь к истолкованию координат $T^{\lambda\mu}$ (λ, $\mu = 1, 2, 3$). Рассмотрим для примера T^{12}. Пользуясь (71.3), (71.4), (71.5), получаем:

$$T^{12} = \mu_0 c^2 \tau^1 \tau^2 = \mu_0 c^2 \frac{u_x u_y}{c^2\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)} = \mu u_x u_y. \qquad (71.12)$$

Другие координаты $T^{\lambda\mu}$ имеют аналогичный вид. Рассмотрим те из них, для которых $\lambda = 1$:

$$T^{11} = \mu u_x u_x, \quad T^{12} = \mu u_x u_y, \quad T^{13} = \mu u_x u_z. \qquad (71.13)$$

Мы замечаем, что величины (71.13) получаются из μu_x, т. е. из *плотности проекции импульса на ось X*, последовательным умножением на u_x, u_y, u_z, т. е. совершенно аналогично тому, как величины (71.9) получаются из μc^2, т. е. из *плотности энергии*. Но величины (71.9) выражают плотность потока *энергии* в направлениях X, Y, Z; значит, (71.13) играют такую же роль для *проекции импульса на ось X*. Итак, *для проекции импульса на ось X плотность потока в направлении осей X, Y, Z будет* T^{11}, T^{12}, T^{13}. Для плотности потока проекций импульса на оси Y, Z такую же роль играют вторая и третья строки матрицы $T^{\lambda\mu}$. Конечно, все это легко получить и непосредственно, не ссылаясь на (71.9).

Рассмотрим теперь скорость протекания *проекции импульса на ось X* через какую-либо поверхность П. Совершенно аналогично (71.11) получаем, что эта скорость — обозначим ее q^1 — равняется вычисленному в данный момент потоку векторного поля $\mu u_x \mathbf{u}$ через поверхность П:

$$q^1 = \iint_{\Pi} \mu u_x \, \mathbf{u}\mathbf{n} \, dS. \qquad (71.14)$$

Скорости протекания через П проекций импульса на ось Y и на ось Z выражаются аналогичными формулами:

$$\left.\begin{aligned} q^2 &= \iint_{\Pi} \mu u_y \, \mathbf{u}\mathbf{n} \, dS, \\ q^3 &= \iint_{\Pi} \mu u_z \, \mathbf{u}\mathbf{n} \, dS. \end{aligned}\right\} \qquad (71.15)$$

Формулы (71.11), (71.14), (71.15), которые вскоре нам понадобятся, мы объединим в общей записи. А именно, обозначая проекции $\mathbf{n}$ на оси X, Y, Z

$$n_x,\ n_y,\ n_z = n_1,\ n_2,\ n_3$$

и развертывая скалярное произведение

$$\mathbf{un} = u_x n_1 + u_y n_2 + u_z n_3,$$

можно переписать эти формулы в следующем виде:

$$q^0 = \iint\limits_{\Pi} \mu c^2 (u_x n_1 + u_y n_2 + u_z n_3)\, dS = c \iint\limits_{\Pi} (T^{01} n_1 + T^{02} n_2 + T^{03} n_3)\, dS. \tag{71.16}$$

$$\left.\begin{aligned} q^1 &= \iint\limits_{\Pi} \mu u_x (u_x n_1 + u_y n_2 + u_z n_3)\, dS = \\ &\qquad = \iint\limits_{\Pi} (T^{11} n_1 + T^{12} n_2 + T^{13} n_3)\, dS, \\ q^2 &= \iint\limits_{\Pi} \mu u_y (u_x n_1 + u_y n_2 + u_z n_3)\, dS = \\ &\qquad = \iint\limits_{\Pi} (T^{21} n_1 + T^{22} n_2 + T^{23} n_3)\, dS, \\ q^3 &= \iint\limits_{\Pi} \mu u_z (u_x n_1 + u_y n_2 + u_z n_3)\, dS = \\ &\qquad = \iint\limits_{\Pi} (T^{31} n_1 + T^{32} n_2 + T^{33} n_3)\, dS. \end{aligned}\right\} \tag{71.17}$$

Мы воспользовались здесь формулами (71.7), (71.13) и им аналогичными.

Формулы (71.17) можно объединить:

$$q^\nu = \iint\limits_{\Pi} \sum_{\lambda=1}^{3} T^{\nu\lambda} n_\lambda\, dS \qquad (\nu = 1,\ 2,\ 3). \tag{71.18}$$

Выясним теперь нашу общую установку в отношении тензора энергии-импульса. Мы рассмотрели тензор энергии-импульса, отвечающий потоку масс. Однако в дальнейшем мы будем считать, что *и всякому физическому процессу, протекающему в сплошной среде, отвечает в пространстве событий определенный тензор энергии-импульса $T^{ij}(M)$, который имеет аналогичный физический смысл.*

А именно, если вычислить координаты T^{ij} в какой-либо ортонормированной координатной системе, то относительно соответствующей инерциальной системы S они будут представлять собой:

T^{00} — плотность энергии;

$T^{0\lambda}$ $(\lambda = 1, 2, 3)$ — умноженную на c плотность проекции импульса на λ-ю ось или деленную на c плотность потока энергии в направлении λ-й оси;

$T^{\nu\lambda}$ $(\lambda, \nu = 1, 2, 3)$ — плотность потока проекции импульса на ν-ю ось в направлении λ-й оси (или наоборот).

В этих формулировках оси X, Y, Z в системе S именуются 1-й, 2-й, 3-й осями. Из этого физического истолкования вытекает, в частности, что формулы (71.16), (71.17) остаются верными и для любого физического процесса.

Допущение о существовании тензора энергии-импульса у всякого физического процесса очень важно. Конечно, суть его не в том, что определенные физические величины обозначены в виде элементов симметрической матрицы, а в том, что они *предполагаются координатами дважды контравариантного тензора и, следовательно, имеют вполне определенный закон преобразования при переходе от одной инерциальной системы S к другой S'*:

$$T^{i'j'} = A_i^{i'} A_j^{j'} T^{ij}.$$

Здесь $A_i^{i'}$ имеет тот же смысл, как и в (67.15). Таким образом, существо нашего допущения в том, что для любого физического процесса оно устанавливает закон преобразования плотности энергии, плотности импульса и плотности потока импульса при переходе от S к S'. Какие имеются основания перенести тензорный характер этих величин, установленный для потока масс, на общий случай?

Математического вывода здесь, разумеется, дать нельзя, но физические основания достаточно веские. Энергия и импульс способны переходить из одной формы в другую, например, из механической в электромагнитную, *количественно не меняясь*. Поэтому после такого перехода плотность энергии и плотность импульса должны преобразовываться от S к S' *по прежнему закону*. Правда, в действительности закон преобразования охватывает, кроме того, и плотности потока импульса. Все же естественно принять, что и этот усложненный закон преобразования не должен нарушаться, когда энергия и импульс переходят из одной формы в другую.

Рассмотрим теперь другой важный частный случай тензора энергии-импульса.

2°. *Тензор энергии-импульса электромагнитного поля.* Пусть электромагнитное поле задано тензорным полем F_{ij} в пространстве событий. Составим из тензора F_{ij} и метрического тензора g_{ij} новый тензор по следующей формуле:

$$T^{ij} = -\frac{g^{ij}}{16\pi} F^{pq} F_{pq} + \frac{1}{4\pi} F^{ip} F^{jq} g_{pq}. \qquad (71.19)$$

По p и q происходит свертывание. Очевидно, тензор T^{ij} будет симметрическим и дважды контравариантным. Этот тензор и принимается за *тензор энергии-импульса электромагнитного поля.*

На первый взгляд кажется, что такой выбор тензора энергии-импульса является совершенно произвольным и ничем не обоснованным. Однако вскоре мы убедимся, что это не так; выбор именно этого выражения почти полностью продиктован законами сохранения энергии и импульса. Мы только не сможем излагать здесь все наводящие соображения и пойдем путем простой проверки.

Как было сказано, мы приписываем координатам тензора энергии-импульса определенный физический смысл. Это значит, что, выбрав для электромагнитного поля определенный тензор энергии-импульса, мы приписали тем самым электромагнитному полю определенное распределение и перемещение энергии и импульса. А это, разумеется, нужно сделать в соответствии с действительностью и прежде всего так, чтобы соблюдался закон сохранения энергии и импульса. При этом нужно учитывать, что энергия и импульс электромагнитного поля могут не только перемещаться, но и переходить в другую (механическую) форму. Мы увидим позже (§ 73), что выражение (71.19) подобрано действительно так, что оно удовлетворяет поставленным условиям.

Чтобы увидеть конкретный смысл формул (71.19), запишем их в развернутом виде в ортонормированной координатной системе. При этом мы будем пользоваться таблицей (69.9) и соотношениями (70.14).

Вычислим сначала инвариант $F^{pq}F_{pq}$, т. е. сумму произведений соответствующих элементов матриц F^{pq} и F_{pq}. Эти элементы согласно (70.14) или равны или отличаются лишь знаком; последнее имеет место в случае $F^{0\lambda}$ ($\lambda = 1, 2, 3$). Заменяя соответственно F^{pq} через $\pm F_{pq}$ и учитывая косую симметрию матрицы F_{pq}, получаем:

$$\begin{aligned} F^{pq}F_{pq} &= 2\left(-F_{01}^2 - F_{02}^2 - F_{03}^2 + F_{12}^2 + F_{23}^2 + F_{31}^2\right) = \\ &= 2\left(-E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 + H_x^2 + H_y^2 + H_z^2\right) = 2\left(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2\right). \end{aligned} \qquad (71.20)$$

Далее, учитывая, что

$$g_{00} = -1, \quad g_{\lambda\lambda} = 1, \quad g_{pq} = 0 \quad (p \neq q),$$

получим

$$F^{ip}F^{jq}g_{pq} = -F^{i0}F^{j0} + \sum_{\lambda=1}^{3} F^{i\lambda}F^{j\lambda}. \qquad (71.21)$$

В частности,

$$F^{0p}F^{0q}g_{pq}=\sum_{\lambda=1}^{3}(F^{0\lambda})^2=E_x^2+E_y^2+E_z^2=\mathbf{E}^2, \tag{71.22}$$

$$F^{0p}F^{1q}g_{pq}=\sum_{\lambda=1}^{3}F^{0\lambda}F^{1\lambda}=E_yH_z-E_zH_y. \tag{71.23}$$

Вычисляем теперь T^{00} из (71.19), пользуясь (71.20) и (71.22), а также учитывая, что $g^{00}=-1$:

$$T^{00}=\frac{1}{8\pi}(\mathbf{H}^2-\mathbf{E}^2)+\frac{1}{4\pi}\mathbf{E}^2=\frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2+\mathbf{H}^2). \tag{71.24}$$

Такой вид имеет, следовательно, *плотность энергии электромагнитного поля*. Далее, находим T^{01}, T^{02}, T^{03}, пользуясь (71.19) и (71.23) и учитывая, что $g^{ij}=0\,(i\neq j)$, в частности, $g^{01}=0$:

$$\left.\begin{aligned} T^{01}&=\frac{1}{4\pi}(E_yH_z-E_zH_y),\\ T^{02}&=\frac{1}{4\pi}(E_zH_x-E_xH_z),\\ T^{03}&=\frac{1}{4\pi}(E_xH_y-E_yH_x). \end{aligned}\right\} \tag{71.25}$$

Таким образом, проекции вектора $\frac{1}{4\pi}[\mathbf{EH}]$ на координатные оси X, Y, Z совпадают с T^{01}, T^{02}, T^{03}. Согласно физическому смыслу этих величин вектор $\frac{1}{4\pi c}[\mathbf{EH}]$ дает *плотность импульса электромагнитного поля*, а вектор $\frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]$ — *плотность потока энергии электромагнитного поля*. Проекции последнего вектора на оси X, Y, Z дают плотности потока энергии в направлениях этих осей.

Аналогичным образом можно было бы вычислить и плотности потока импульса.

3°. Рассмотрим еще пример, хотя и далеко не столь общего значения, как первые два. Пусть в инерциальной системе S *покоится* тело, находящееся в напряженном состоянии, возникшем, например, в результате упругой деформации. Ввиду того, что тело покоится, плотность импульса равна нулю:

$$T^{0\lambda}=0 \quad (\lambda=1,\ 2,\ 3).$$

Матрица T^{ij} состоит по существу из элемента T^{00} (плотности энергии) и из матрицы третьего порядка $T^{\nu\lambda}$ $(\nu,\ \lambda=1,\ 2,\ 3)$.

Оказывается, что в нашем примере *эта часть тензора энергии-импульса лишь знаком отличается от трехмерного тензора напряжений* $f_{\nu\lambda}$ (§ 14). В самом деле, в произвольной точке рассматриваемого тела установим бесконечно малую площадку dS, ортогональную к оси X. Тогда на единицу площади этой площадки согласно (14.10) действует сила

$$\mathbf{P}(f_{11},\ f_{12},\ f_{13}), \tag{71.26}$$

а на всю площадку — сила $\mathbf{P}\,dS\,(f_{11}\,dS,\ f_{12}\,dS,\ f_{13}\,dS)$. Точнее, эта сила действует через площадку на часть тела, расположенную за площадкой (т. е. в сторону $-X$). За время ε этой части тела будет сообщен тем самым импульс

$$\mathbf{P}\,dS\varepsilon\,(f_{11}\,dS\varepsilon,\ f_{12}\,dS\varepsilon,\ f_{13}\,dS\varepsilon),$$

который, таким образом, протек через площадку в сторону $-X$. Чтобы установить *плотность потока импульса* в направлении $-X$, достаточно отнести протекший импульс к единице площади и к единице времени, т. е. поделить на dS и ε. Получаем снова (71.26). Таким образом, напряжения f_{11}, f_{12}, f_{13} равны плотностям потока трех проекций импульса в направлении $-X$, а следовательно, лишь знаком отличаются от T^{11}, T^{12}, T^{13}, которые выражают то же самое, но в направлении $+X$. Это же справедливо и для других координатных осей, так что окончательно

$$T^{\nu\lambda} = -f_{\nu\lambda} \quad (\nu,\ \lambda = 1,\ 2,\ 3). \tag{71.27}$$

Конечно, мы предполагали в этом рассуждении, что, кроме напряжений в теле, нет других причин для появления потока импульса.

Если перейти в другую инерциальную систему S', то тензор энергии-импульса пересчитывается по закону (71.20). Как отсюда можно заключить, на плотность энергии и импульса, наблюдаемых в системе S', имеет влияние не только плотность энергии, наблюдавшаяся в системе S (плотность импульса была равна нулю), *но и напряжения, наблюдавшиеся в системе* S. Если в системе S покоятся два тела с одинаковой плотностью энергии (и нулевой плотностью импульса), но одно находящееся в напряженном состоянии, а другое нет, то в системе S' они будут обладать различными (вообще говоря) плотностями энергии и импульса.

Таким образом, объединение плотностей энергии, импульса и потока импульса в один четырехмерный тензор не является лишь формальностью; совокупность этих величин образует единую физическую сущность, и это проявляется в том, что одни из них способны «переходить» в другие, когда мы меняем инерциальную систему.

§ 72. Закон сохранения энергии и импульса

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос, каким образом обеспечиваются законы сохранения энергии и импульса, когда распределение и перемещение энергии и импульса задается тензором T^{ij}. Будем вести рассмотрение относительно какой-либо инерциальной