соблюдается и в любой другой S'. Закон сохранения энергии-импульса (72.13), как мы видим, накладывает существенное ограничение на допустимый выбор полного тензора энергии-импульса. Разумеется, если тензор энергии-импульса является частичным, то его дивергенция T^i не обязана обращаться в нуль.

§ 73. Дивергенция тензора энергии-импульса электромагнитного поля

Пусть теперь T^{ij} является *частичным* тензором энергии-импульса, а именно, отвечает электромагнитному полю согласно (71.19):

$$T^{ij} = -\frac{g^{ij}}{16\pi} F^{pq} F_{pq} + \frac{1}{4\pi} F^{ip} F^{jq} g_{pq}. \tag{73.1}$$

Тогда в области ω за время ε возникают (за счет перехода из других форм) некоторые количества энергии и импульса электромагнитного поля, которые выражаются согласно (72.7) и (72.11). Пользуясь дивергенцией тензора энергии-импульса (72.14), эти выражения энергии и импульса можно переписать в виде

$$\varepsilon c \iiint\limits_{\omega} T^0 \, d\omega, \qquad \varepsilon \sum_{\nu=1}^{3} \mathbf{e}_\nu \iiint\limits_{\omega} T^\nu \, d\omega. \tag{73.2}$$

Подсчитаем теперь дивергенцию тензора (73.1). Заметим предварительно, что при дифференцировании выражения $F^{pq}F_{pq}$ можно дифференцировать лишь второй множитель и затем результат удваивать. В самом деле, дифференцирование первого множителя дает тот же результат, что и дифференцирование второго

$$\frac{\partial F^{pq}}{\partial x^k} F_{pq} = F^{pq} \frac{\partial F_{pq}}{\partial x^k}. \tag{73.3}$$

Чтобы убедиться в этом, выражаем F^{pq} как результат поднятия индексов у F_{ij}:

$$F^{pq} = g^{pi} g^{qj} F_{ij}$$

и вставляем в обе части проверяемого равенства (73.3). Получим (учитывая, что g_{ij} и g^{ij} — константы):

$$g^{pi} g^{qj} \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} F_{pq} = g^{pi} g^{qj} F_{ij} \frac{\partial F_{pq}}{\partial x^k},$$

а это — тождество, в чем легко убедиться, переставляя в одной из частей равенства обозначения индексов суммирования p, i и q, j.

Теперь вычисляем дивергенцию:

$$T^i=\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j}=$$
$$=-\frac{g^{ij}}{16\pi}\cdot 2F^{pq}\frac{\partial F_{pq}}{\partial x^j}+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial F^{ip}}{\partial x^j}F^{jq}g_{pq}+\frac{1}{4\pi}F^{ip}\frac{\partial F^{jq}}{\partial x^j}g_{pq}. \qquad (73.4)$$

Полученное выражение можно значительно упростить. В первом члене мы заменяем множитель $\frac{\partial F_{pq}}{\partial x^j}$, пользуясь уравнениями Максвелла (70.6):

$$\frac{\partial F_{pq}}{\partial x^j}=-\frac{\partial F_{qj}}{\partial x^p}-\frac{\partial F_{jp}}{\partial x^q}. \qquad (73.5)$$

Получаем:

$$-\frac{g^{ij}}{16\pi}\cdot 2F^{pq}\frac{\partial F_{pq}}{\partial x^j}=\frac{g^{ij}}{8\pi}F^{pq}\frac{\partial F_{qj}}{\partial x^p}+\frac{g^{ij}}{8\pi}F^{pq}\frac{\partial F_{jp}}{\partial x^q}. \qquad (73.6)$$

Оба слагаемых здесь равны, в чем легко убедиться, заменяя в первом из них обозначения индексов суммирования p на q, и наоборот. Тогда первое слагаемое примет вид

$$\frac{g^{ij}}{8\pi}F^{qp}\frac{\partial F_{pj}}{\partial x^q}$$

и совпадет со вторым (так как перестановка индексов у F^{pq}, F_{jp} дважды меняет знак выражения). Поэтому в (73.6) мы сохраняем лишь удвоенное второе слагаемое и, подставляя в (73.4), получаем:

$$T^i=\frac{g^{ij}}{4\pi}F^{pq}\frac{\partial F_{jp}}{\partial x^q}+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial F^{ip}}{\partial x^j}F^{jq}g_{pq}+\frac{1}{4\pi}F^{ip}\frac{\partial F^{jq}}{\partial x^j}g_{pq}. \qquad (73.7)$$

Первые два члена в правой части взаимно уничтожаются. Действительно, в первом члене происходит поднятие первого индекса у F_{jp}, так что его можно переписать в виде

$$\frac{1}{4\pi}F^{pq}\frac{\partial F^{i\cdot}_{\cdot p}}{\partial x^q}.$$

Во втором члене происходит опускание второго индекса у F^{ip}, так что этот член принимает вид

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial F^{i\cdot}_{\cdot q}}{\partial x^j}F^{jq}.$$

Заменяя здесь обозначения индексов суммирования q, j на p, q, убеждаемся, что это выражение отличается от предыдущего лишь знаком (так как $F^{qp}=-F^{pq}$).

Итак, (73.7) принимает вид

$$T^i = \frac{1}{4\pi} F^{ip} \frac{\partial F^{jq}}{\partial x^j} g_{pq}. \tag{73.8}$$

Воспользуемся уравнениями Максвелла (70.17):

$$\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^j} = 4\pi s^i \quad \left(\text{а следовательно, } \frac{\partial F^{ji}}{\partial x^j} = -4\pi s^i\right).$$

Теперь (73.8) дает окончательно

$$T^i = -F^{ip} s^q g_{pq}. \tag{73.9}$$

Выясним физический смысл тензора T^i с точки зрения какой-либо инерциальной системы S, рассматривая координаты T^i в соответствующей ортонормированной координатной системе x^i (заметим, что все тензоры и тензорные соотношения, которые у нас встречаются, можно рассматривать в любой аффинной координатной системе, но физическое истолкование они получают лишь в ортонормированных системах). Тогда $g_{00} = -1$, $g_{\lambda\lambda} = 1$ $(\lambda = 1, 2, 3)$, остальные $g_{pq} = 0$, так что (73.9) приобретает вид

$$T^i = F^{i0}s^0 - F^{i1}s^1 - F^{i2}s^2 - F^{i3}s^3. \tag{73.10}$$

Пользуясь таблицей (69.9) и соотношениями (70.14), получаем:

$$\left.\begin{aligned} &F^{10} = -E_x, \quad F^{20} = -E_y, \quad F^{30} = -E_z, \\ &F^{12} = H_z, \quad E^{23} = H_x, \quad F^{31} = H_y. \end{aligned}\right\} \tag{73.11}$$

При этом $F^{ii} = 0$ и $F^{ji} = -F^{ij}$. Кроме того, согласно (68.13)

$$s^0 = \rho, \qquad s^1 = \rho\frac{u_x}{c}, \qquad s^2 = \rho\frac{u_y}{c}, \qquad s^3 = \rho\frac{u_z}{c}. \tag{73.12}$$

Теперь окончательно подсчитываем T^i при $i = 0, 1, 2, 3$:

$$\left.\begin{aligned} T^0 &= -\frac{\rho}{c}(E_x u_x + E_y u_y + E_z u_z) = -\frac{\rho}{c}\mathbf{u}\mathbf{E}, \\ T^1 &= -\frac{\rho}{c}(cE_x + H_z u_y - H_y u_z) \end{aligned}\right\} \tag{73.13}$$

и далее круговой подстановкой x, y, z. Отсюда вытекает, что

$$\sum_{\nu=1}^{3} T^\nu \mathbf{e}_\nu = -\rho\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{u}\mathbf{H}]\right). \tag{73.14}$$

Здесь ρ есть плотность заряда, а $\mathbf{u}$ — скорость его движения.

Подсчитаем теперь первое из выражений (73.2):

$$\varepsilon c \iiint\limits_{\omega} T^0 \, d\omega = -\iiint\limits_{\omega} \varepsilon \mathbf{u} \mathbf{E} \rho \, d\omega. \tag{73.15}$$

Так как $\rho\, d\omega$ — заряд, заключенный в элемент объема $d\omega$, то $\mathbf{E}\rho\, d\omega$ — сила электрического поля, действующая на этот заряд; $\varepsilon\mathbf{u}$ — вектор бесконечно малого смещения за время ε; следовательно, стоящее под знаком интеграла скалярное произведение дает работу, совершаемую электромагнитным полем над элементом заряда за время ε (магнитное поле работы не производит). Сам же интеграл в правой части означает *работу, произведенную электромагнитным полем в пределах области ω за время ε над частицами, несущими электрические заряды.* Эта работа идет на приращение механической энергии частиц. Но так как правая часть (73.15) содержит интеграл с обратным знаком, то она выражает *убыль* механической энергии частиц.

Окончательно, равенство (73.15) означает, что *возникновение энергии в электромагнитном поле (левая часть) происходит за счет убыли такого же количества механической энергии заряженных частиц (правая часть).*

Таким образом, во взаимоотношениях электромагнитного поля и движущихся в нем заряженных частиц *соблюдается закон сохранения энергии.*

Теперь подсчитаем второе выражение (73.2), пользуясь соотношением (73.14):

$$\varepsilon \iiint\limits_{\omega} \sum_{\nu=1}^{3} \mathbf{e}_\nu T^\nu \, d\omega = -\iiint\limits_{\omega} \varepsilon \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{u}\mathbf{H}]\right) \rho \, d\omega. \tag{73.16}$$

В круглых скобках стоит сила, действующая в электромагнитном поле на единицу заряда, движущегося со скоростью $\mathbf{u}$; после умножения на элемент заряда $\rho\, d\omega$ получаем действующую на него силу, а после умножения на ε — импульс, который сообщается электромагнитным полем элементу заряда за время ε. Сам же интеграл в правой части означает, следовательно, *механический импульс, сообщенный электромагнитным полем в пределах области ω за время ε частицам, несущим электрические заряды.* Так как правая часть (73.16) содержит интеграл с обратным знаком, то она выражает *убыль* механического импульса частиц.

Окончательно смысл равенства (73.16) состоит в том, что *возникновение импульса электромагнитного поля (левая часть) происходит за счет убыли такого же количества механического импульса заряженных частиц.* Таким образом, в балансе электромагнитного и механического импульса соблюдается закон сохранения импульса.

Напомним, что мы говорили до сих пор об энергии, импульсе и потоке энергии и импульса в электромагнитном поле, *предполагая,* что его тензор энергии-импульса имеет вид (73.1). Лишь теперь это предположение оправдано в том смысле, что оно правильно описывает переход энергии и импульса из электромагнитной формы в механическую и обратно: закон сохранения энергии-импульса при этом соблюдается.

§ 74*. Волновое уравнение Дирака для свободного электрона

В этом параграфе мы рассмотрим один вопрос релятивистской (т. е. согласованной с теорией относительности) квантовой механики. Изменение состояния электрона с течением времени описывается в ней спинорным полем в пространстве событий

$$\psi_\lambda = \psi_\lambda(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3), \quad \psi_{\hat\lambda} = \psi_{\hat\lambda}(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3). \tag{74.1}$$

Здесь, как обычно,

$$x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3 = ct,\ x,\ y,\ z \tag{74.2}$$

в некоторой инерциальной системе отсчета. Так как пространство событий представляет собой псевдоевклидово пространство $R_4^{(1)}$, то все, сказанное относительно спинорных полей в § 60, применимо и в нашем случае.

Закон изменения состояния электрона с течением времени выражается системой дифференциальных уравнений, наложенных на функции (74.1) и имеющих одинаковый (инвариантный) вид в любой инерциальной системе отсчета. Эти уравнения согласно Дираку будут следующими:

$$\left.\begin{aligned} m_0 c\psi^\lambda &= \hbar D^{\lambda\hat\mu}\psi_{\hat\mu}, \\ m_0 c\psi^{\hat\lambda} &= \hbar D^{\hat\lambda\mu}\psi_\mu. \end{aligned}\right\} \tag{74.3}$$

Здесь m_0 — масса покоя электрона, c — скорость света, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, где h — *постоянная Планка*. Величины ψ^λ, $\psi^{\hat\lambda}$, стоящие в левых частях уравнений, это контравариантные координаты того же самого спинора ψ_λ, $\psi_{\hat\lambda}$, который входит в правые части. Операторы $D^{\lambda\hat\mu} = D^{\hat\mu\lambda}$ имеют тот же смысл, что и в § 60.

Инвариантный характер уравнений (74.3) виден из того, что их правые части согласно (60.7) представляют собой также контравариантные координаты некоторого спинора и преобразуются, следовательно, одинаково с левыми частями. Напишем теперь уравнения (74.3) в развернутом виде при $\lambda = 1, 2$, $\hat\lambda = \hat1, \hat2$, причем правые части развернем согласно (60.8), а в левых частях контравариантные координаты нашего спинора выразим через ковариантные