что его тензор энергии-импульса имеет вид (73.1). Лишь теперь это предположение оправдано в том смысле, что оно правильно описывает переход энергии и импульса из электромагнитной формы в механическую и обратно: закон сохранения энергии-импульса при этом соблюдается.

§ 74*. Волновое уравнение Дирака для свободного электрона

В этом параграфе мы рассмотрим один вопрос релятивистской (т. е. согласованной с теорией относительности) квантовой механики. Изменение состояния электрона с течением времени описывается в ней спинорным полем в пространстве событий

$$\psi_\lambda = \psi_\lambda(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3), \quad \psi_{\hat\lambda} = \psi_{\hat\lambda}(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3). \tag{74.1}$$

Здесь, как обычно,

$$x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3 = ct,\ x,\ y,\ z \tag{74.2}$$

в некоторой инерциальной системе отсчета. Так как пространство событий представляет собой псевдоевклидово пространство $R_4^{(1)}$, то все, сказанное относительно спинорных полей в § 60, применимо и в нашем случае.

Закон изменения состояния электрона с течением времени выражается системой дифференциальных уравнений, наложенных на функции (74.1) и имеющих одинаковый (инвариантный) вид в любой инерциальной системе отсчета. Эти уравнения согласно Дираку будут следующими:

$$\left.\begin{aligned} m_0 c\psi^\lambda &= \hbar D^{\lambda\hat\mu}\psi_{\hat\mu}, \\ m_0 c\psi^{\hat\lambda} &= \hbar D^{\hat\lambda\mu}\psi_\mu. \end{aligned}\right\} \tag{74.3}$$

Здесь m_0 — масса покоя электрона, c — скорость света, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, где h — *постоянная Планка*. Величины ψ^λ, $\psi^{\hat\lambda}$, стоящие в левых частях уравнений, это контравариантные координаты того же самого спинора ψ_λ, $\psi_{\hat\lambda}$, который входит в правые части. Операторы $D^{\lambda\hat\mu} = D^{\hat\mu\lambda}$ имеют тот же смысл, что и в § 60.

Инвариантный характер уравнений (74.3) виден из того, что их правые части согласно (60.7) представляют собой также контравариантные координаты некоторого спинора и преобразуются, следовательно, одинаково с левыми частями. Напишем теперь уравнения (74.3) в развернутом виде при $\lambda = 1,\ 2,\ \hat\lambda = \hat 1,\ \hat 2$, причем правые части развернем согласно (60.8), а в левых частях контравариантные координаты нашего спинора выразим через ковариантные согласно (57.7). Получим:

$$\left.\begin{aligned} -m_0c\psi_2 &= \hbar\left(\frac{\partial\psi_{\hat{1}}}{\partial x^3}+\frac{\partial\psi_{\hat{1}}}{\partial x^0}+\frac{\partial\psi_{\hat{2}}}{\partial x^1}+i\,\frac{\partial\psi_{\hat{2}}}{\partial x^2}\right),\\ m_0c\psi_1 &= \hbar\left(\frac{\partial\psi_{\hat{1}}}{\partial x^1}-i\,\frac{\partial\psi_{\hat{1}}}{\partial x^2}-\frac{\partial\psi_{\hat{2}}}{\partial x^3}+\frac{\partial\psi_{\hat{2}}}{\partial x^0}\right),\\ -m_0c\psi_{\hat{2}} &= \hbar\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x^3}+\frac{\partial\psi_1}{\partial x^0}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x^1}-i\,\frac{\partial\psi_2}{\partial x^2}\right),\\ m_0c\psi_{\hat{1}} &= \hbar\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x^1}+i\,\frac{\partial\psi_1}{\partial x^2}-\frac{\partial\psi_2}{\partial x^3}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x^0}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (74.4)$$

Это и есть *волновые уравнения Дирака для свободного электрона*. Мы здесь не имеем возможности вдаваться в физический смысл этих уравнений и хотели лишь показать их инвариантный характер на основе предыдущей теории спиноров. Заметим только, что из уравнений Дирака можно без труда выразить частные производные по времени $\frac{\partial\psi_1}{\partial t}$, $\frac{\partial\psi_2}{\partial t}$, $\frac{\partial\psi_{\hat{1}}}{\partial t}$, $\frac{\partial\psi_{\hat{2}}}{\partial t}$ через сами функции ψ_1, ψ_2, $\psi_{\hat{1}}$, $\psi_{\hat{2}}$, и их частные производные по пространственным координатам x, y, $z = x^1$, x^2, x^3 $\left(\text{не нужно забывать, что } \frac{\partial\psi_1}{\partial x^0}=\frac{1}{c}\frac{\partial\psi_1}{\partial t} \text{ и т. д.}\right)$. Получим:

$$\left.\begin{aligned} \hbar\frac{\partial\psi_{\hat{1}}}{\partial t} &= -\hbar c\left(\frac{\partial\psi_{\hat{1}}}{\partial z}+\frac{\partial\psi_{\hat{2}}}{\partial x}+i\,\frac{\partial\psi_{\hat{2}}}{\partial y}\right)-m_0c^2\psi_2,\\ \hbar\frac{\partial\psi_{\hat{2}}}{\partial t} &= -\hbar c\left(\frac{\partial\psi_{\hat{1}}}{\partial x}-i\,\frac{\partial\psi_{\hat{1}}}{\partial y}-\frac{\partial\psi_{\hat{2}}}{\partial z}\right)+m_0c^2\psi_1,\\ \hbar\frac{\partial\psi_1}{\partial t} &= -\hbar c\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial z}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x}-i\,\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right)-m_0c^2\psi_{\hat{2}},\\ \hbar\frac{\partial\psi_2}{\partial t} &= -\hbar c\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+i\,\frac{\partial\psi_1}{\partial y}-\frac{\partial\psi_2}{\partial z}\right)+m_0c^2\psi_{\hat{1}}. \end{aligned}\right\} \qquad (74.5)$$

Это означает, что по начальному состоянию электрона при данном значении t мы можем, интегрируя систему уравнений Дирака, определить его состояние при любом значении t *). Со спинорным полем электрона связано векторное поле *плотности тока*. Не вдаваясь в разъяснение его физического смысла, покажем, как оно возникает

---

*) Уравнения Дирака в этой форме см., например, В. А. Фок, Начала квантовой механики, КУБУЧ, 1932, стр. 182, формула (19); при этом нужно иметь в виду, что наши ψ_1, ψ_2, $\psi_{\hat{1}}$, $\psi_{\hat{2}}$ совпадают с ψ_1, ψ_2, $-i\psi_3$, $-i\psi_4$ в обозначениях В. А. Фока.

из нашего спинорного поля ψ^{λ}, $\psi^{\hat{\lambda}}$. С каждым спинором ψ^{λ}, $\psi^{\hat{\lambda}}$ можно связать *сопряженный спинор* $\tilde{\psi}^{\lambda}$, $\tilde{\psi}^{\hat{\lambda}}$, составленный следующим образом:

$$\tilde{\psi}^{\lambda}=(\psi^{\hat{\lambda}})^{*},\quad \tilde{\psi}^{\hat{\lambda}}=(\psi^{\lambda})^{*}. \tag{74.6}$$

Здесь звездочка по-прежнему означает комплексную сопряженность. Покажем, что построение сопряженного спинора этим путем имеет инвариантный смысл в нашем псевдоевклидовом пространстве $R_4^{(1)}$, если ограничиться вращениями лишь собственными и несобственными 1-го рода. Последние связаны с зеркальными отражениями репера в пространственном смысле, без изменения ориентации на оси времени $x^0=ct$. Поэтому наше ограничение с физической точки зрения является вполне естественным, так как системы отсчета с обращенным течением времени в природе не существуют. Рассмотрим сначала случай, когда репер $\mathfrak{R}$ в $R_4^{(1)}$ испытывает собственное вращение. Тогда ψ^1, ψ^2 преобразуются в $\psi^{1'}$, $\psi^{2'}$ при помощи некоторой унимодулярной матрицы, а значит, $(\psi^1)^*$, $(\psi^2)^*$ преобразуются при помощи комплексно сопряженной матрицы, т. е. так же, как вторая пара координат спинора $\psi^{\hat{1}}$, $\psi^{\hat{2}}$ (см. (59.5)). Таким образом, $\tilde{\psi}^{\hat{1}}$, $\tilde{\psi}^{\hat{2}}$, совпадающие с $(\psi^1)^*$, $(\psi^2)^*$ согласно (74.6), преобразуются так, как подобает координатам спинора. Аналогичным образом показываем это и для $\tilde{\psi}^1$, $\tilde{\psi}^2$.

Пусть теперь репер испытывает несобственное вращение 1-го рода; приходим к тому же результату, используя вместо (59.5) формулы (59.7).

Составим из данного спинора ψ^{λ}, $\psi^{\hat{\lambda}}$ и ему сопряженного $\tilde{\psi}^{\lambda}$, $\tilde{\psi}^{\hat{\lambda}}$ спинтензор $c^{\lambda\hat{\mu}}=c^{\hat{\mu}\lambda}$ по формуле

$$c^{\lambda\hat{\mu}}=\psi^{\lambda}\tilde{\psi}^{\hat{\mu}}+\tilde{\psi}^{\lambda}\psi^{\hat{\mu}},\quad c^{\hat{\mu}\lambda}=\psi^{\hat{\mu}}\tilde{\psi}^{\lambda}+\tilde{\psi}^{\hat{\mu}}\psi^{\lambda}. \tag{74.7}$$

Другими словами, мы перемножили наши спиноры как одновалентные спинтензоры, в результате чего по общему правилу перемножения тензоров получился двухвалентный спинтензор. Перемножение мы выполнили при одном и при другом порядке множителей и результаты сложили. Наконец, мы откинули (положили равными нулю) координаты $c^{\lambda\mu}$, $c^{\hat{\lambda}\hat{\mu}}$ и сохранили лишь $c^{\lambda\hat{\mu}}$, $c^{\hat{\mu}\lambda}$. Здесь мы воспользовались уже специфическими свойствами спинтензоров, в силу которых координаты этих двух типов преобразуются по отдельности и образуют как бы два подтензора в составе каждого двухвалентного спинтензора. Наш спинтензор допускает истолкование в виде вектора в $R_4^{(1)}$ согласно (58.1). Учитывая, что $x^4=ix^0$, и заменяя $c^{\lambda\hat{\mu}}$

согласно (74.7), а $\tilde{\psi}^{\lambda}$, $\tilde{\psi}^{\hat{\lambda}}$ согласно (74.6), получаем:

$$
\begin{aligned}
x^0 &= -\frac{1}{2}\left(c^{1\hat{1}} + c^{2\hat{2}}\right) = -\frac{1}{2}\left\{\psi^1(\psi^1)^* + \psi^{\hat{1}}(\psi^{\hat{1}})^* + {}\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \psi^2(\psi^2)^* + \psi^{\hat{2}}(\psi^{\hat{2}})^*\right\}, \\
x^1 &= \frac{1}{2}\left(c^{1\hat{2}} + c^{2\hat{1}}\right) = -\frac{1}{2}\left\{-\psi^1(\psi^2)^* - \psi^{\hat{2}}(\psi^{\hat{1}})^* - {}\right. \\
&\qquad\qquad \left. - \psi^2(\psi^1)^* - \psi^{\hat{1}}(\psi^{\hat{2}})^*\right\}, \\
x^2 &= \frac{1}{2i}\left(c^{1\hat{2}} - c^{2\hat{1}}\right) = -\frac{1}{2}\left\{i\psi^1(\psi^2)^* + i\psi^{\hat{2}}(\psi^{\hat{1}})^* - {}\right. \\
&\qquad\qquad \left. - i\psi^2(\psi^1)^* - i\psi^{\hat{1}}(\psi^{\hat{2}})^*\right\}, \\
x^3 &= \frac{1}{2}\left(c^{1\hat{1}} - c^{2\hat{2}}\right) = -\frac{1}{2}\left\{-\psi^1(\psi^1)^* - \psi^{\hat{1}}(\psi^{\hat{1}})^* + {}\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \psi^2(\psi^2)^* + \psi^{\hat{2}}(\psi^{\hat{2}})^*\right\}.
\end{aligned}
$$

Обозначая $A^i = -2x^i$ и переходя в правых частях к ковариантным координатам спинора, согласно (57.7) получаем:

$$
\left.
\begin{aligned}
A^0 &= \psi_1\psi_1^* + \psi_2\psi_2^* + \psi_{\hat{1}}\psi_{\hat{1}}^* + \psi_{\hat{2}}\psi_{\hat{2}}^*. \\
A^1 &= \psi_2\psi_1^* + \psi_1\psi_2^* + \psi_{\hat{2}}\psi_{\hat{1}}^* + \psi_{\hat{1}}\psi_{\hat{2}}^*, \\
A^2 &= -i\psi_2\psi_1^* + i\psi_1\psi_2^* + i\psi_{\hat{2}}\psi_{\hat{1}}^* - i\psi_{\hat{1}}\psi_{\hat{2}}^*, \\
A^3 &= \psi_1\psi_1^* - \psi_2\psi_2^* + \psi_{\hat{1}}\psi_{\hat{1}}^* - \psi_{\hat{2}}\psi_{\hat{2}}^*.
\end{aligned}
\right\} \qquad (74.8)
$$

Этот вектор и есть вектор плотности тока, инвариантно связанный со всяким спинорным полем (74.1). При этом мы устранили несобственные вращения репера 2-го и 3-го родов; если бы их рассмотреть, то оказалось бы, что при них вектор плотности тока не остается инвариантным, а умножается на -1 *).

---

*) Заметим что наши A^i совпадают с A_i ($i=0$, 1, 2, 3) в «Началах квантовой механики» В. А. Фока, стр. 189, если учесть указанную выше связь обозначений.