ГЛАВА V

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ В АФФИННОМ И ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВАХ

До сих пор мы рассматривали n-мерные аффинные и евклидовы пространства лишь в аффинных координатах, т. е. таких, которые наиболее естественно связаны с геометрическими свойствами этих пространств.

В этой главе продолжаем заниматься теми же пространствами, но уже с более широкой точки зрения — относя их к произвольным криволинейным координатам. Это играет роль и для геометрии самих этих пространств (например, для изучения криволинейных образов в них), однако главное назначение этой главы — служить переходным этапом к *пространствам аффинной связности* (обобщение аффинного пространства) и к *римановым пространствам* (обобщение евклидова пространства).

Начиная с этой главы и до конца книги, мы будем заниматься исключительно вещественными пространствами, и все встречающиеся в дальнейшем переменные величины и отдельные числа считаем вещественными, если не оговорено противное.

§ 75. Криволинейные координаты в аффинном пространстве

Имея аффинный репер $(O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ в n-мерном аффинном пространстве, мы относили каждой точке M координаты x^i, разлагая ее радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ по векторам репера

$$\overrightarrow{OM} = x^i \mathbf{e}_i. \tag{75.1}$$

От одной аффинной координатной системы к другой мы переходили линейным преобразованием

$$x^{i'} = A_i^{i'} x^i + A^{i'}, \tag{75.2}$$

где коэффициенты выбираются произвольно с единственным условием

$$\mathrm{Det}\,|A_i^{i'}| \neq 0.$$

При этом новые векторы репера разлагались по старым векторам

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{e}_i, \tag{75.3}$$

где $A^i_{i'}$ и $A^{i'}_i$ — взаимно обратные матрицы, а координаты *инвариантного* вектора $\mathbf{x}$ испытывали преобразование

$$x^{i'} = A^{i'}_i x^i. \tag{75.4}$$

Мы введем криволинейные координаты, обобщая преобразование координат (75.2), а именно, заменяя в правой части линейные функции координат x^i их «произвольными» функциями, конечно, с известными ограничениями.

Но сначала дадим некоторые определения. *Арифметическим пространством* n измерений называется множество всевозможных последовательностей вида $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, где $x^1, x^2, \ldots, x^n$ — произвольные вещественные числа; отдельные последовательности $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ называются *точками* арифметического пространства, а числа $x^1, x^2, \ldots, x^n$ — *координатами* точек.

Областью (открытым множеством) в арифметическом пространстве называется такое множество его точек, что вместе с каждой своей точкой $x = (x^1, \ldots, x^n)$ оно содержит и любую точку $y = (y^1, \ldots, y^n)$, для которой

$$|y^i - x^i| < \delta \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где δ — некоторое положительное число (выбор которого зависит от точки x).

Иными словами, область характеризуется тем, что вместе с каждой своей точкой она обязательно содержит и охватывающий эту точку многомерный куб, если только этот куб имеет достаточно малые размеры. Разумеется, вместо куба можно брать (многомерный) шар и т. п.

Пусть $x^1, \ldots, x^n$ — независимые переменные, и пусть системы значений, которые они способны принимать, образуют область в арифметическом пространстве; тогда эту область мы будем называть областью изменения переменных $x^1, \ldots, x^n$.

Множество Ω точек n-мерного аффинного пространства мы назовем областью, если последовательность $(x^1, \ldots, x^n)$ аффинных координат точки $M \in \Omega$ описывает область в арифметическом пространстве.

Нетрудно показать, что смысл этого определения не меняется при переходе к другой аффинной системе координат, хотя область в арифметическом пространстве становится, конечно, иной.

Мы будем обычно предполагать, что рассматриваемые области являются связными, т. е. что любые две точки области:

$a=(a^1,\ldots,a^n)$, $b=(b^1,\ldots,b^n)$ — могут быть соединены непрерывным путем, проходящим по области: $x^i=f^i(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$; $f^i(0)=a^i$, $f^i(1)=b^i$, где $f^i(t)$ — непрерывные функции.

Пусть в некоторой n-мерной связной области Ω аффинного пространства заданы n непрерывно дифференцируемых однозначных функций аффинных координат $f_k(x^1,\ \ldots,\ x^n)$ $(k=1,\ \ldots,\ n)$. Введем новые переменные $x^{1'}$, $x^{2'}$, $\ldots$, $x^{n'}$ посредством уравнений

$$x^{i'}=f_i(x^1,\ \ldots,\ x^n); \tag{75.5}$$

пусть они пробегают область изменения Ω'. *Мы наложим, далее, на функции f_i требование, чтобы преобразование* (75.5) *было обратимым, точнее, чтобы из уравнений* (75.5) *можно было бы, обратно, однозначно выразить x^i как непрерывно дифференцируемые функции от $x^{i'}$:*

$$x^i=g_i(x^{1'},\ \ldots,\ x^{n'}) \tag{75.6}$$

во всей области Ω' изменения переменных $x^{i'}$.

В этом случае переменные $x^{i'}$ мы будем называть *криволинейными координатами в области Ω аффинного пространства. Коротко говоря, переменные $x^{i'}$ с областью изменения Ω' называются криволинейными координатами в области Ω, если они связаны с аффинными координатами в области Ω обратимым и в обе стороны однозначным и непрерывно дифференцируемым преобразованием.*

Тем самым, в частности, системы значений $x^{1'}$, $\ldots$, $x^{n'}$ из области Ω' взаимно однозначно отвечают точкам области Ω, что и оправдывает название *координат* для переменных $x^{i'}$. Область Ω может, в частности, совпадать и со всем пространством, но это для нас мало существенно и вот почему. Дальнейшие исследования будут носить большей частью дифференциально геометрический характер, т. е. относиться к бесконечно малой окрестности точки, а для этого достаточно иметь координатную систему $x^{i'}$ в некоторой области Ω, содержащей эту точку.

Мы предположили, что функции f_i, g_i непрерывно дифференцируемы, т. е. имеют непрерывные частные производные до некоторого порядка N включительно. При этом в §§ 75, 76 достаточно ограничиться $N=1$, а начиная с § 77 и до конца главы, мы будем предполагать $N=2$. Позже понадобится $N=3$ и больше. Мы не будем в каждом случае оговаривать это особо, а просто факт записи производных данного порядка будет означать предположение о существовании и непрерывности этих производных. Значение $N=\infty$ также допустимо (когда рассматриваемые функции имеют непрерывные производные любого порядка).

Важно отметить, что якобианы обоих преобразований — прямого и обратного — отличны от нуля:

$$\mathrm{Det}\left|\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right|\neq 0,\quad \mathrm{Det}\left|\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right|\neq 0, \tag{75.7}$$

причем соответствующие матрицы взаимно обратные. Это легко получить, рассматривая x^i как сложную функцию от $x^1, \ldots, x^n$: x^i зависит от $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ согласно (75.6), а эти переменные зависят от $x^1, \ldots, x^n$ в силу (75.5). Тогда частная производная от x^i по одному из аргументов $x^1, \ldots, x^n$ вычисляется по известному правилу:

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} \quad (\text{по } k' \text{ — суммирование}).$$

Но, с другой стороны, производная от одного аргумента по другому равна нулю, если аргументы различные, и равна единице, если они совпадают: $\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j$.

Итак,

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} = \delta^i_j, \tag{75.8}$$

т. е. произведение матриц $\left\| \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \right\|$ и $\left\| \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} \right\|$ дает единичную матрицу. *Таким образом, эти матрицы взаимно обратные и тем самым неособенные.*

Заметим, что если бы мы откинули условие обратимости (75.6), а потребовали бы вместо него необращение в нуль якобиана

$$\operatorname{Det} \left| \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right| \neq 0, \tag{75.9}$$

то мы не достигли бы нашей цели. Если даже условие (75.9) соблюдается во всей области Ω, то это гарантирует однозначную обратимость лишь в некоторой окрестности каждой точки области, но не во всей области Ω в целом. Так, например, пусть область Ω (в трехмерном случае) имеет вид распухшей буквы C, причем отображение на область Ω' состоит в том, что Ω сдавливается в вертикальном направлении, так что просвет справа исчезает, и отросток, спускающийся сверху, входит в отросток, поднимающийся снизу. Такое отображение Ω на Ω' уже не будет *взаимно* однозначным, хотя при этом всегда можно обеспечить условие (75.9) и взаимную однозначность в *малом*.

Переход от одной криволинейной системы координат $x^{i'}$ к другой $x^{i''}$ в той же области Ω удовлетворяет тем же условиям, что и переход от аффинных координат x^i к криволинейным $x^{i'}$.

В самом деле, согласно нашим требованиям $x^{i''}$ суть непрерывно дифференцируемые функции от x^i, а x^i — от $x^{i'}$, так что $x^{i''}$ оказываются непрерывно дифференцируемыми функциями от $x^{i'}$, и обратно; Ω', область изменения $x^{i'}$, и Ω'', область изменения $x^{i''}$, будут находиться во взаимно однозначном соответствии.

Ясно также, что если от криволинейных координат $x^{i'}$ (с областью изменения Ω') перейти к новым переменным $x^{i''}$ (с областью изменения Ω'') при помощи обратимого и в обе стороны непрерывно дифференцируемого преобразования, то $x^{i''}$ будут тоже служить криволинейными координатами в той же области Ω. Действительно, переменные $x^{i''}$ посредством координат $x^{i'}$ будут связаны с аффинными координатами x^i обратимым и в обе стороны непрерывно дифференцируемым преобразованием, а именно в этом случае мы и называем $x^{i''}$ криволинейными координатами в данной области. Во всех этих формулировках имеется в виду непрерывная дифференцируемость того же порядка, что и в определении криволинейных координат.

В случае обычного евклидова пространства простейшими примерами криволинейных координат могут служить цилиндрические и полярные координаты. Заметим, что, желая обеспечить *взаимно* однозначный характер их соответствия с точками, мы должны рассматривать их не во всем пространстве, а в области Ω, полученной удалением из пространства одной полуплоскости, краем которой служит ось Z (при обычном расположении чертежа), причем ось Z удаляется тоже.

Выражая в формуле (75.1) x^i через $x^{i'}$, мы получаем зависимость радиуса-вектора точки M от ее криволинейных координат:

$$\overrightarrow{OM} = g_1(x^{1'}, \ldots, x^{n'})\,\mathbf{e}_1 + \ldots + g_n(x^{1'}, \ldots, x^{n'})\,\mathbf{e}_n. \qquad (75.10)$$

Обозначая кратко $\overrightarrow{OM}$ через $\mathbf{x}$, мы будем писать:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(x^{1'}, \ldots, x^{n'}). \qquad (75.11)$$

В силу непрерывной дифференцируемости функций g_i эта векторная функция будет такое же число раз непрерывно дифференцируемой согласно § 65. Правда, там мы дифференцировали вектор по единственному аргументу и один раз, но для частных производных и притом любого порядка все рассуждения повторяются дословно. Отметим еще — это для нас будет важно, — что частные производные $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^{1'}}, \ldots, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^{n'}}$ будут в каждой точке *линейно независимыми векторами*. Действительно, дифференцируя (75.10) по $x^{i'}$, получаем:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^1}{\partial x^{i'}}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial x^2}{\partial x^{i'}}\mathbf{e}_2 + \ldots + \frac{\partial x^n}{\partial x^{i'}}\mathbf{e}_n \quad (i' = 1', 2', \ldots, n'). \qquad (75.12)$$

Матрица коэффициентов $\left\| \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \right\|$ неособенная, следовательно, $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^{i'}}$ линейно независимы.