§ 76. Тензоры в криволинейных координатах

Мы будем рассматривать область Ω аффинного пространства, отнесенную к криволинейным координатам x^i (сейчас мы обозначаем их без штрихов). Радиус-вектор $\mathbf{x}$ произвольной точки M области Ω, отсчитываемый от фиксированной точки O, будет выражаться согласно (75.11) функцией

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(x^1, \ldots, x^n), \tag{76.1}$$

достаточное число раз непрерывно дифференцируемой (для этого параграфа довольно одного раза). В дальнейшем мы предполагаем, что все рассматриваемые точки принадлежат области Ω.

Для ориентации в строении данной координатной системы весьма полезны *координатные линии*. Так мы будем называть кривые, вдоль которых меняется лишь одна из координат x^i, а остальные остаются постоянными. Рассмотрим, например, координатную линию x^1. Это значит, что $x^2, \ldots, x^n$ закреплены на постоянных значениях, так что радиус-вектор $\mathbf{x}$ (76.1) остается функцией одного лишь x^1; мы получаем кривую, отнесенную к параметру x^1.

Через каждую точку M пройдет одна и только одна координатная линия x^1, именно, если $x^2, \ldots, x^n$ закрепить на значениях, которые они имеют в точке M. Частная производная $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^1}$ дает касательный вектор к координатной линии x^1 (§ 65). Все сказанное справедливо и для любых координатных линий, так что через каждую точку M проходят n координатных линий с касательными векторами $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i}$. Эти векторы мы будем обозначать кратко

$$\mathbf{x}_i=\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i}. \tag{76.2}$$

Они, как мы знаем, всегда линейно независимы, и потому *в каждой точке M могут быть приняты за векторы аффинного репера* $\{M, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$. Таким образом, *задание криволинейных координат в области Ω влечет появление в каждой ее точке M вполне определенного аффинного репера* $\{M, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$. Этот *аффинный репер* мы будем называть *локальным репером в точке M*.

Когда в качестве частного случая криволинейных координат мы берем аффинные координаты, функция (76.1) принимает прежний вид (75.1):

$$\mathbf{x}=x^i\mathbf{e}_i, \quad \text{так что} \quad \mathbf{x}_i=\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i}=\mathbf{e}_i, \tag{76.3}$$

и локальный репер в каждой точке M имеет те же векторы, что и основной репер, на котором построена данная аффинная координатная система.

Для рассмотрения локальных реперов имеются глубокие основания. Именно вспомним те простые свойства, которыми обладали аффинные координаты точек: приращения этих координат при переходе из точки $M(x^i)$ в точку $L(y^i)$ выражали координаты вектора смещения $\overrightarrow{ML}$:

$$\overrightarrow{ML}=\overrightarrow{OL}-\overrightarrow{OM}=(y^i-x^i)\,\mathbf{e}_i,$$

поскольку

$$\overrightarrow{OM}=x^i\mathbf{e}_i,$$
$$\overrightarrow{OL}=y^i\mathbf{e}_i$$

(говоря о координатах вектора, мы всегда будем иметь в виду его *аффинные* координаты; криволинейные координаты для векторов не имеют смысла). В этом, можно сказать, и состояла сущность аффинных координат точек.

Для криволинейных координат x^i эти простые свойства теряются. Однако мы находим их снова, *если рассматривать криволинейные координаты в бесконечно малой окрестности данной точки M.*

Смещаясь из точки $M(x^i)$ в бесконечно близкую точку $L(x^i+\Delta x^i)$, мы находим вектор смещения $\overrightarrow{ML}$, как приращение радиуса вектора $\mathbf{x}$ точки M:

$$\overrightarrow{ML}=\overrightarrow{OL}-\overrightarrow{OM}=\mathbf{x}(x^i+\Delta x^i)-\mathbf{x}(x^i).$$

Пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка, заменяем приращение полным дифференциалом и получаем:

$$\overrightarrow{ML}\approx \mathbf{x}_1\Delta x^1+\ldots+\mathbf{x}_n\Delta x^n. \tag{76.4}$$

Это значит, что вектор смещения $\overrightarrow{ML}$ в локальном репере $\{M, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ имеет координаты, равные приблизительно приращениям Δx^i.

Итак, для бесконечно малых смещений из точки M приращения криволинейных координат Δx^i снова выражают координаты вектора смещения $\overrightarrow{ML}$, если эти последние вычислять в локальном репере в точке M, пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка.

Таким образом, при помощи локального репера криволинейным координатам возвращаются свойства аффинных координат, правда, теперь уже лишь в бесконечно малой окрестности данной точки.

Можно сказать также, что *приращения Δx^i криволинейных координат в бесконечно малой окрестности точки M совпадают* *с точностью 1-го порядка с аффинными координатами относительно локального репера, построенного в точке M.*

Естественно, что, занимаясь геометрией аффинного пространства в криволинейных координатах, мы постоянно будем сталкиваться с локальными реперами.

Выясним теперь, что происходит с локальными реперами, когда криволинейные координаты подвергаются преобразованию

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, \ldots, x^n), \tag{76.5}$$

которое предполагается однозначно обратимым и непрерывно дифференцируемым в обе стороны (§ 75). Выражая, обратно,

$$x^i = x^i(x^{1'}, \ldots, x^{n'}), \tag{76.6}$$

мы можем считать в уравнении (76.1) радиус-вектор $\mathbf{x}$ сложной функцией от $x^{i'}$. Частная производная по $x^{i'}$ выразится тогда по известной формуле:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}.$$

В правой части по i, конечно, происходит суммирование. Заметим, что мы будем без стеснения прилагать обычные формулы дифференцирования к выражениям, содержащим векторы, так как справедливость этих формул устанавливается тривиальным образом: достаточно свести дифференцирование векторов к дифференцированию их координат (§ 65).

Окончательно получаем:

$$\mathbf{x}_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \mathbf{x}_i. \tag{76.7}$$

Итак, преобразование криволинейных координат влечет за собой преобразование локального репера в каждой точке M, причем векторы нового локального репера разлагаются по векторам старого с коэффициентами $\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$; $\operatorname{Det}\left|\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right| \neq 0$. Сравнивая с нашей прежней записью преобразования аффинного репера

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'} \mathbf{e}_i,$$

мы видим, что (76.7) представляет собой ее частный случай, когда

$$A^i_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}, \tag{76.8}$$

а роль векторов $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_{i'}$ играют $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{x}_{i'}$.

Рассмотрим теперь произвольное тензорное поле, например, $V^i_{jk}(M)$ (§ 38). Точка M может при этом пробегать всю область Ω или только некоторую поверхность в ней, или даже линию в зависимости от того, где тензорное поле задано.

Координаты тензора V^i_{jk} можно вычислять относительно любого аффинного репера. Однако в дальнейшем мы всегда будем считать, что аффинное пространство (по крайней мере в пределах области Ω) отнесено к каким-либо криволинейным координатам x^i. Тогда в каждой точке M возникает локальный репер, и координаты тензора $V^i_{jk}(M)$ мы будем брать относительно именно этого репера. Эти координаты мы будем кратко называть координатами тензора $V^i_{jk}(M)$ в данной системе криволинейных координат x^i.

Когда в дальнейшем мы будем говорить о тензорном поле

$$V^i_{jk}(M) = V^i_{jk}(x^1, \ \ldots, \ x^n), \tag{76.9}$$

то всегда будем подразумевать сказанное выше.

Если тензорное поле задано не во всей области Ω, а лишь на некоторой поверхности (линии), то в уравнениях (76.9) V^i_{jk} нужно задавать, конечно, как функции параметров этой поверхности (линии). Тензорное поле может выродиться и в задание тензора V^i_{jk} в одной только точке M.

Вслед за преобразованием криволинейных координат происходит преобразование локального репера в каждой точке M, а значит, и преобразование координат тензора $V^i_{jk}(M)$ по обычному тензорному закону:

$$V^{i'}_{j'k'}(M) = A^{i'}_i A^j_{j'} A^k_{k'} V^i_{jk}(M). \tag{76.10}$$

При этом, как мы видели, матрица $A^i_{i'}$ совпадает с матрицей $\dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$, а следовательно, обратная матрица $A^{i'}_i$ — с матрицей $\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$:

$$A^{i'}_i = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}. \tag{76.11}$$

Следовательно, закон преобразования (76.10) принимает вид

$$V^{i'}_{j'k'}(M) = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(M) \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}(M) \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}(M) V^i_{jk}(M). \tag{76.12}$$

Таким образом, переход от одних криволинейных координат к другим, влечет за собой преобразование координат тензорного поля

$V^i_{jk}(M)$ по закону (76.12). При этом частные производные $x^{i'}$ по x^i и обратно берутся в той же точке M, как и координаты тензора, что и отмечено в записи.

Все тензорные операции алгебраического характера автоматически переносятся и на тензорные поля, как это было показано в § 38. Правда, там мы относили все тензорное поле к *одному* реперу $\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, теперь же у нас в *каждой точке имеется свой локальный репер* $\{M, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$. Но это не меняет наших рассуждений, так как алгебраические операции над тензорами совершаются *по отдельности в каждой точке* M.

Зато с абсолютным дифференцированием тензорных полей в криволинейных координатах дело будет обстоять совсем не так просто. В этой главе мы не будем им заниматься, так как в главе VII мы получим соответствующие результаты в более общем виде.

Отметим, в частности, что любой вектор ξ, заданный в точке M, мы будем всегда относить к локальному реперу в точке M и под его координатами ξ^i понимать координаты относительно локального репера. Таким образом, ξ^i определяются из разложения

$$\xi = \xi^i \mathbf{x}_i. \tag{76.13}$$

Координаты инвариантного вектора образуют, как мы знаем, контравариантный тензор относительно любого аффинного репера, в частности, и относительно локального репера, так что закон преобразования ξ^i будет иметь вид

$$\xi^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \xi^i. \tag{76.14}$$

Обратно, если нам задан в точке M один раз контравариантный тензор с координатами ξ^i, то разложение (76.13) определяет инвариантный вектор ξ, как тоже известно из общей теории (§ 24). Задание векторного поля $\xi(M)$ равносильно вследствие этого заданию тензорного поля $\xi^i(M)$.

§ 77. Параллельное перенесение

Одним из важнейших свойств аффинного пространства является возможность откладывать данный вектор из любой точки. Возникает вопрос, как это реализовать, когда рассматриваемая область Ω отнесена к криволинейным координатам x^i. Вектор ξ_0 мы будем предполагать заданным его координатами ξ_0^i в некоторой точке M_0; отложить его мы хотим из другой точки M_1. Разумеется, если отложить в M_1 вектор с теми же координатами ξ_0^i, то это не достигнет цели, так как локальные реперы в M_0 и M_1 различны. Нам нужно