$V^i_{jk}(M)$ по закону (76.12). При этом частные производные $x^{i'}$ по x^i и обратно берутся в той же точке M, как и координаты тензора, что и отмечено в записи.

Все тензорные операции алгебраического характера автоматически переносятся и на тензорные поля, как это было показано в § 38. Правда, там мы относили все тензорное поле к *одному* реперу $\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, теперь же у нас в *каждой точке имеется свой локальный репер* $\{M, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$. Но это не меняет наших рассуждений, так как алгебраические операции над тензорами совершаются *по отдельности в каждой точке* M.

Зато с абсолютным дифференцированием тензорных полей в криволинейных координатах дело будет обстоять совсем не так просто. В этой главе мы не будем им заниматься, так как в главе VII мы получим соответствующие результаты в более общем виде.

Отметим, в частности, что любой вектор ξ, заданный в точке M, мы будем всегда относить к локальному реперу в точке M и под его координатами ξ^i понимать координаты относительно локального репера. Таким образом, ξ^i определяются из разложения

$$\xi = \xi^i \mathbf{x}_i. \tag{76.13}$$

Координаты инвариантного вектора образуют, как мы знаем, контравариантный тензор относительно любого аффинного репера, в частности, и относительно локального репера, так что закон преобразования ξ^i будет иметь вид

$$\xi^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \xi^i. \tag{76.14}$$

Обратно, если нам задан в точке M один раз контравариантный тензор с координатами ξ^i, то разложение (76.13) определяет инвариантный вектор ξ, как тоже известно из общей теории (§ 24). Задание векторного поля $\xi(M)$ равносильно вследствие этого заданию тензорного поля $\xi^i(M)$.

§ 77. Параллельное перенесение

Одним из важнейших свойств аффинного пространства является возможность откладывать данный вектор из любой точки. Возникает вопрос, как это реализовать, когда рассматриваемая область Ω отнесена к криволинейным координатам x^i. Вектор ξ_0 мы будем предполагать заданным его координатами ξ_0^i в некоторой точке M_0; отложить его мы хотим из другой точки M_1. Разумеется, если отложить в M_1 вектор с теми же координатами ξ_0^i, то это не достигнет цели, так как локальные реперы в M_0 и M_1 различны. Нам нужно установить, как следует изменить ξ_0^i, чтобы в локальном репере в точке M_1 они определяли прежний вектор $\boldsymbol{\xi}_0$.

Однако решение этой задачи не приводит к чему-либо интересному, если переносить вектор $\boldsymbol{\xi}_0$ из M_0 в M_1 одним скачком. Интерес представляет непрерывное перенесение вектора $\boldsymbol{\xi}_0$ по какой-либо кривой $\overset{\frown}{M_0M_1}$, причем мы рассматриваем ход непрерывного изменения его координат ξ^i *на каждом бесконечно малом участке пути*. Именно это упрощение задачи и приводит к содержательным результатам.

Пусть путь $\overset{\frown}{M_0M_1}$ задан параметрическими уравнениями

$$x^i = x^i(t) \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \tag{77.1}$$

где $x^i(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции. Заметим, что $\overset{\frown}{M_0M_1}$ есть кривая в смысле § 65: если $x^i(t)$ подставить в (76.1), то радиус-вектор $\mathbf{x}$ оказывается функцией от t. В каждой точке $M(t)$ этого пути мы откладываем постоянный вектор $\boldsymbol{\xi}_0$, координаты которого ξ^i, однако, меняются от точки к точке ввиду изменения от точки к точке локального репера. Таким образом, координаты ξ^i зависят от t:

$$\xi^i = \xi^i(t), \tag{77.2}$$

и мы хотим выяснить, по какому закону будут меняться эти функции хотя бы на бесконечно малом участке пути.

Так как функции $x^i(t)$ — непрерывно дифференцируемые, мы сейчас же получаем, что вдоль пути векторы локального репера $\mathbf{x}_i(x^1,\ \ldots,\ x^n)$, а значит, и ξ^i являются непрерывно дифференцируемыми функциями t (предполагая $N = 2$; смысл N см. § 75).

Относя вектор $\boldsymbol{\xi}_0$ к локальному реперу в точке $M(t)$, пишем:

$$\boldsymbol{\xi}_0 = \xi^i(t)\,\mathbf{x}_i(x^1,\ \ldots,\ x^n). \tag{77.3}$$

Здесь имеется в виду, что аргументы $x^1,\ \ldots,\ x^n$ сами зависят от t согласно параметрическим уравнениям пути. Дифференцируя по t почленно и учитывая, что $\boldsymbol{\xi}_0 = \mathrm{const}$, получим:

$$0 = d\xi^i\mathbf{x}_i + \xi^i d\mathbf{x}_i. \tag{77.4}$$

Чтобы разобраться в этом результате, нам нужно векторы $d\mathbf{x}_i$ разложить по векторам локального репера.

По формуле полного дифференциала

$$d\mathbf{x}_i(x^1,\ \ldots,\ x^n) = \mathbf{x}_{ij}dx^j, \tag{77.5}$$

где

$$\mathbf{x}_{ij}=\frac{\partial^2\mathbf{x}(x^1, \ldots, x^n)}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Векторы $\mathbf{x}_{ij}$, вполне определенные *для каждой точки области* Ω (а не только вдоль рассматриваемого пути), можно разложить по векторам локального репера $\mathbf{x}_i$ в этой точке:

$$\mathbf{x}_{ij}=\Gamma_{ij}^k \mathbf{x}_k. \tag{77.6}$$

Через Γ_{ij}^k мы обозначили коэффициенты разложения; по k происходит, конечно, суммирование. Очевидное равенство

$$\mathbf{x}_{ij}=\mathbf{x}_{ji}$$

влечет за собой

$$\Gamma_{ij}^k=\Gamma_{ji}^k \tag{77.7}$$

ввиду однозначности разложения по векторам репера. Конечно, Γ_{ij}^k зависят от точки, где производится разложение (77.6), так что

$$\Gamma_{ij}^k(M)=\Gamma_{ij}^k(x^1, \ldots, x^n). \tag{77.8}$$

Величины Γ_{ij}^k, определенные таким образом в данной системе криволинейных координат x^i для каждой точки M области Ω, мы будем называть коэффициентами связности.

Смысл этого названия вскоре выяснится. Коэффициенты связности впоследствии (в обобщенном виде) будут играть у нас исключительно важную роль.

Возвращаемся к нашей задаче. Вставляя разложение (77.6) в (77.5), получаем:

$$d\mathbf{x}_i=\Gamma_{ij}^k \mathbf{x}_k dx^j,$$

после чего равенство (77.4) принимает вид

$$0=d\xi^k \mathbf{x}_k+\Gamma_{ij}^k \mathbf{x}_k \xi^i dx^j.$$

В первом члене правой части мы изменили лишь обозначение индекса суммирования на k. Ввиду линейной независимости векторов $\mathbf{x}_k$ обращение в нуль их линейной комбинации означает обращение в нуль и всех ее коэффициентов; следовательно,

$$d\xi^k+\Gamma_{ij}^k \xi^i dx^j=0,$$

или, что то же,

$$d\xi^k=-\Gamma_{ij}^k \xi^j dx^i. \tag{77.9}$$

(Ввиду симметрии Γ_{ij}^k по нижним индексам безразлично, свертывается ли ξ^i с первым, а dx^i — со вторым его индексом или наоборот). Это и есть *формула параллельного перенесения вектора* в бесконечно малом. Она решает следующую задачу: *если в данной точке $M(x^i)$ вектор имеет координаты ξ^k, то какие координаты будет иметь тот же вектор в бесконечно близкой точке $M'(x^i+dx^i)$?*

Конечно, эту задачу мы решаем не точно, а пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка. Вернее, мы выражаем не приращения, а дифференциалы координат ξ^k при переходе из M в M'.

Как мы видим, $d\xi^k$ линейно зависят и от данных координат ξ^j и от дифференциалов dx^i координат точки. Коэффициентами служат Γ^k_{ij}; мы видим, что при их помощи связываются векторы в M и векторы в M', откуда и происходит название «коэффициенты связности».

Мы как будто забыли о том пути $\overset{\smile}{M_0M_1}$, по которому двигались, или, точнее, ограничились его произвольным бесконечно малым кусочком.

Если же мы захотели бы применить полученную формулу (77.9) к перенесению вектора по конечному пути M_0M_1, то нам пришлось бы интегрировать соответствующую систему дифференциальных уравнений. Здесь мы на этом не останавливаемся, так как позже будем заниматься этим вопросом в обобщенном виде.

В частном случае, когда координаты x^i аффинные,

$$\mathbf{x}(x^1, \ldots, x^n) = x^i\mathbf{e}_i, \qquad \mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i, \qquad \mathbf{x}_{ij} = 0,$$

и из (77.6) следует:

$$\Gamma^k_{ij} = 0. \tag{77.10}$$

Обратно, если в какой-нибудь системе криволинейных координат $\Gamma^k_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$ тождественно обращаются в нуль, то из (77.6) следует:

$$\mathbf{x}_{ij} = 0, \qquad \mathbf{x}_i = \mathbf{const}.$$

Обозначая $\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i$, получим наконец

$$\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i + \mathbf{x}_0.$$

Такое выражение для радиуса-вектора (где $\mathbf{x}_0 = \mathbf{const}$) показывает, что x^i — аффинные координаты (с началом в точке $\mathbf{x}_0$).

Итак, для того чтобы криволинейные координаты в рассматриваемой области Ω оказались, как частный случай, просто аффинными, необходимо и достаточно, чтобы в этих координатах тождественно обращались в нуль Γ^k_{ij}.