§ 78. Объект связности

Мы ввели коэффициенты связности Γ_{ij}^{k} в некоторой системе криволинейных координат x^i в каждой точке M области Ω.

Допустим, что мы перешли в другую систему криволинейных координат $x^{i'}$ и там вычислили Γ_{ij}^{k}; по какому закону будут преобразовываться Γ_{ij}^{k} в $\Gamma_{i'j'}^{k'}$?

Как оказывается, этот закон не будет тензорным, хотя индексные обозначения коэффициентов связности как будто наталкивают на эту мысль. Исходя из разложения (77.6), определяющего Γ_{ij}^{k}, нетрудно этот закон найти. В старых и соответственно в новых координатах мы имеем:

$$\mathbf{x}_{ij} = \Gamma_{ij}^{k}\mathbf{x}_k, \qquad \mathbf{x}_{i'j'} = \Gamma_{i'j'}^{k'}\mathbf{x}_{k'}. \tag{78.1}$$

Мы хотим, пользуясь первым разложением, подсчитать коэффициенты второго разложения, что и даст искомый закон.

Дифференцирование $\mathbf{x}(x^1, \ldots, x^n)$ как сложной функции от $x^{i'}$ приводит нас к (76.7):

$$\mathbf{x}_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\mathbf{x}_i. \tag{78.2}$$

Еще раз дифференцируем, теперь по $x^{j'}$, снова рассматривая $\mathbf{x}_i(x^1, \ldots, x^n)$ как сложную функцию от $x^{j'}$. Так как

$$\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} = \mathbf{x}_{ij}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}},$$

то мы получаем, дифференцируя (78.2) по $x^{j'}$,

$$\mathbf{x}_{i'j'} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\mathbf{x}_i + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\mathbf{x}_{ij}. \tag{78.3}$$

В первом члене правой части меняем обозначение индекса суммирования i на k и, пользуясь первым разложением (78.1), переписываем:

$$\mathbf{x}_{i'j'} = \left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\Gamma_{ij}^{k}\right)\mathbf{x}_k. \tag{78.4}$$

Пользуясь, далее, формулой (78.2), записанной с переменой ролей старых и новых координат:

$$\mathbf{x}_k = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\mathbf{x}_{k'}, \tag{78.5}$$

получаем окончательно:

$$\mathbf{x}_{i'j'} = \left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\Gamma_{ij}^{k}\right)\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\mathbf{x}_{k'}.$$

Сравнивая со вторым разложением (78.1), мы видим, что

$$\Gamma_{i'j'}^{k'} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\,\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\Gamma_{ij}^k. \tag{78.6}$$

Это и есть искомый закон преобразования коэффициентов связности. Этот закон совпал бы с тензорным, если в правой части оставить лишь последний член. Но наличие дополнительного члена, содержащего, между прочим, вторые производные старых координат по новым, принципиально меняет дело.

Если в данной точке M для каждой системы криволинейных координат x^i нам указана система чисел Γ_{ij}^k, преобразующихся по закону (78.6) *при переходе от одной системы к другой системе криволинейных координат, то мы говорим, что в точке M задан объект связности.* При этом подразумевается, что частные производные в (78.6) вычислены в точке M. Обычно объект связности рассматривается не в одной точке M, а в каждой точке области Ω:

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k(M) = \Gamma_{ij}^k(x^1, \ldots, x^n), \tag{78.7}$$

так что мы имеем поле объекта связности $\Gamma_{ij}^k(M)$. Для краткости мы в дальнейшем под «объектом связности» будем понимать именно *поле объекта связности.*

Мы видим, что коэффициенты связности $\Gamma_{ij}^k(M)$ в нашем аффинном пространстве образуют определенный объект связности, который мы назовем *объектом связности нашего аффинного пространства.* Но *произвольно взятый* объект связности, вообще говоря, не является объектом связности нашего пространства. Более того, он не является объектом связности и вообще какого-либо аффинного пространства. Точный смысл этого замечания выяснится позже.

Объект связности есть частный случай *дифференциально-геометрического объекта класса* 2. *Мы говорим, что в точке M дан дифференциально-геометрический объект класса* 2, *если в каждой системе криволинейных координат x^i нам дано s чисел $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$, причем при переходе от координат x^i к новым координатам $x^{i'}$ новые значения $\varphi_{1'}, \varphi_{2'}, \ldots, \varphi_{s'}$ выражаются как определенные* (*непрерывно дифференцируемые*) *функции старых значений $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$ и частных производных новых координат $x^{i'}$ по старым x^i до 2-го порядка включительно*; *эти производные предполагаются вычисленными в точке M**). В закон преобразования могут входить,

*) Обычно предполагают, кроме того, что это преобразование обладает групповым характером, т. е. последовательное его выполнение для переходов от x^i к $x^{i'}$ и от $x^{i'}$ к $x^{i''}$ дает это же преобразование для перехода от x^i к $x^{i''}$. Однако групповой характер можно вывести из нашего определения (хотя и без изменения объекта по существу, но, может быть, с изменением формальной записи закона его преобразования).

конечно, производные и старых координат по новым, но мы об этом не упоминаем, так как их всегда можно выразить при желании через производные новых координат по старым.

Совершенно аналогично определяется дифференциально-геометрический объект любого класса v; в частности, тензоры являются примером дифференциально-геометрических объектов класса 1, так как в закон их преобразования входят лишь первые частные производные новых координат по старым.

Важнейшее значение объекта связности аффинного пространства состоит в том, что *он определяет всю геометрию аффинного пространства*, точнее, той его области Ω, в которой объект связности задается.

Это можно формулировать в виде следующей теоремы.

Пусть нам известно, что переменные $x^1, \ldots, x^n$, *пробегающие данную связную область изменения* Ω^*, *служат криволинейными координатами в какой-то (неизвестной) области* Ω *аффинного пространства, причем коэффициенты связности в этих криволинейных координатах нам заданы функциями*

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}(x^1, \ldots, x^n). \tag{78.8}$$

Тогда мы можем восстановить всю геометрию области Ω.

Подчеркнем, что в условии теоремы нам *не дано ка́к именно и в какой области* Ω введены криволинейные координаты x^i, а известно лишь, что *как-то* это сделано. Таким образом, заранее мы не знаем, как именно сопоставлены наши координаты точкам аффинного пространства, и должны это обнаружить на основе знания коэффициентов связности.

Чтобы доказать теорему, достаточно суметь перейти в области Ω от криволинейных координат x^i к каким-нибудь аффинным координатам, которые мы обозначим $x^{i'}$.

Действительно, *в аффинной координатной системе* мы без труда можем определить все соотношения между точками и векторами и осуществить все конструкции, которые перечислены в аксиоматике аффинного пространства. Тем самым и вся геометрия аффинного пространства будет восстановлена (в нашем случае в пределах области Ω).

Для того чтобы $x^{i'}$ служили аффинными координатами в области Ω, необходимо и достаточно, чтобы $\Gamma^{i'}_{j'k'} = 0$ (конец § 77). Поэтому мы будем искать такие формулы преобразования

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, \ldots, x^n),$$

чтобы этого добиться в преобразованных координатах $x^{i'}$.

Используем закон преобразования (78.6), написав его для обратного перехода от $x^{i'}$ к x^i:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \Gamma^{k'}_{i'j'} . \tag{78.9}$$

Очевидно, требование $\Gamma^{k'}_{i'j'} = 0$ влечет за собой

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} . \tag{78.10}$$

Обратно, отсюда следует $\Gamma^{k'}_{i'j'} = 0$. Правда, непосредственно при подстановке (78.10) в (78.9) получаем обращение в нуль $\Gamma^{k'}_{i'j'}$, *подвергнутых преобразованию по тензорному закону*, но это влечет обращение в нуль и самих $\Gamma^{k'}_{i'j'}$.

Перепишем теперь (78.10) в более удобном виде. Умножая почленно на $\dfrac{\partial x^{l'}}{\partial x^k}$ и суммируя по k, получим:

$$\Gamma^k_{ij} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^i \partial x^j} \delta^{l'}_{k'} = \frac{\partial^2 x^{l'}}{\partial x^i \partial x^j} . \tag{78.11}$$

Итак,

$$\frac{\partial^2 x^{l'}}{\partial x^i \partial x^j} = \Gamma^k_{ij}(x^1, \ \ldots, \ x^n) \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^k} . \tag{78.12}$$

Таким образом, для того чтобы преобразование криволинейных координат x^i

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, \ \ldots, \ x^n)$$

давало бы нам аффинные координаты $x^{i'}$, *необходимо и достаточно, чтобы функции* $x^{i'}(x^1, \ \ldots, \ x^n)$ *удовлетворяли системе дифференциальных уравнений второго порядка* (78.12).

А так как функции $\Gamma^k_{ij}(x^1, \ \ldots, \ x^n)$ нам заданы, то мы можем фактически написать уравнения (78.12) и среди систем криволинейных координат $x^{i'}$ выделить те, которые этим уравнениям удовлетворяют. Это будут аффинные координатные системы; по любой из них мы можем восстановить и всю геометрию области Ω. Теорема доказана. Заметим, что существование решений у системы дифференциальных уравнений (78.12) в нашем случае сомнений не вызывает, так как в области Ω наверняка существуют аффинные координаты $x^{i'}$; вопрос состоял лишь в том, как $x^{i'}$ выразить через x^i.

Доказанная теорема наводит на следующий вопрос, исключительно важный для дальнейшего.

Пусть в области изменения переменных $x^1, \ \ldots, \ x^n$, *которую мы обозначим* Ω^*, *заданы какие-то функции* $\Gamma^i_{jk}(x^1, \ldots, x^n)$, *и притом* *во всей области* Ω^* $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$; *всегда ли можно истолковать переменные* $x^1, \ldots, x^n$ *как криволинейные координаты в некоторой области* Ω *аффинного пространства так, чтобы наперед заданные функции* $\Gamma^i_{jk}(x^1, \ldots, x^n)$ *выражали коэффициенты связности в области* Ω?

Ответ на этот вопрос будет, как мы позже увидим, *отрицательным*, даже если вместо всей области Ω^* брать сколь угодно малые ее куски. Требуемое истолкование возможно лишь в весьма частном случае, когда Γ^i_{jk} удовлетворяют определенной системе дифференциальных уравнений в частных производных. Заметим, что этот отрицательный результат не противоречит доказанной теореме: действительно, возможность истолковать функции $\Gamma^i_{jk}(x^1, \ldots, x^n)$ как коэффициенты связности в криволинейных координатах x^i *входила в условие теоремы.*

Теперь возникает следующий вопрос: мы знаем, что в некоторых частных случаях функции $\Gamma^i_{jk}(x^1, \ldots, x^n)$, заданные в области изменения переменных x^i, *определяют в этой области аффинную геометрию* (именно, если истолкование Γ^i_{jk} как коэффициентов связности в криволинейных координатах x^i удается). *Нельзя ли считать, что и в общем случае функции* $\Gamma^i_{jk}(x^1, \ldots, x^n)$ *все-таки определяют в рассматриваемой области некоторую геометрию, которая, естественно, является обобщением аффинной?* Ответом на этот вопрос служит понятие *о пространстве аффинной связности*, которым мы будем заниматься в главе VII (§ 89).

§ 79. Криволинейные координаты в евклидовом пространстве

Так как евклидово пространство получается из аффинного лишь дополнительным введением метрики (в форме скалярного произведения векторов; § 39), то все сказанное о криволинейных координатах в §§ 75—78 остается верным, и повторять этого мы не будем. В частности, за *объект связности евклидова пространства* мы принимаем объект связности Γ^k_{ij} аффинного пространства, на базе которого оно построено. Но наличие метрики означает появление дополнительных вопросов, которые мы также хотим рассмотреть в криволинейных координатах. Как мы знаем, задание метрики сводится к заданию метрического тензора g_{ij}, который можно относить к любому аффинному реперу. При этом имеет место формула

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j. \tag{79.1}$$

В соответствии с общим соглашением (§ 76) мы, рассматривая тензор g_{ij} *в криволинейных координатах* x^i, относим его в каждой