ГЛАВА VI

МНОГООБРАЗИЯ

Мы собираемся перейти к основным для этой книги понятиям *пространства аффинной связности и риманова пространства*. В рамках этих понятий мы будем затем оставаться до конца книги. Как уже указывалось в § 79, мы приходим к ним путем обобщения соответственно понятий об аффинном и евклидовом пространствах. В грубых чертах указывался и путь этого обобщения: мы рассматриваем некоторую область изменения переменных $x^1, \ldots, x^n$ и геометризируем ее в первом случае путем введения функций $\Gamma^k_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$, которые используются аналогично коэффициентам связности аффинного пространства, во втором случае путем введения функций $g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$, которые должны служить чем-то вроде координат метрического тензора g_{ij} евклидова пространства.

Однако геометризацию области изменения переменных $x^1, \ldots, x^n$ нужно начинать с более раннего этапа, именно, с превращения ее *в многообразие*, еще независимо от задания функций Γ^k_{ij} или g_{ij}. В настоящей главе мы этим и займемся.

§ 80. Элементарное многообразие

Начнем с наводящих соображений. Связную область в аффинном пространстве мы можем относить к различным системам криволинейных координат, любые две из которых связаны между собой преобразованием взаимно однозначным и в обе стороны N раз непрерывно дифференцируемым:

$$x^{i'} = f_i(x^1, \ldots, x^n) \text{ и, обратно, } x^i = g_i(x^{1'}, \ldots, x^{n'}). \quad (80.1)$$

При этом x^i пробегают область изменения Ω, $x^{i'}$ — область изменения Ω' (определение области см. § 75). При соблюдении всех этих условий преобразование (80.1) переменных x^i в переменные $x^{i'}$ мы будем называть кратко преобразованием класса N.

То, что мы имеем область именно в аффинном пространстве, сказывается в том, что среди координатных систем выделены особые, аффинные координатные системы с точностью уже до *линейных* преобразований. Перейдя в какую-нибудь из аффинных координатных систем, мы очевидным образом можем установить все аффинные свойства области Ω. Представим себе теперь, что *мы отказались от выделения среди координатных систем некоторых особенных* (аффинных), а считаем все эти системы равноправными. Тогда мы теряем аффинные свойства рассматриваемой области, она перестает быть куском аффинного пространства и становится некоторым множеством, элементы которого мы называем точками в сущности лишь по инерции. Однако это множество, как мы сейчас увидим, все же сохраняет некоторые геометрические свойства, правда, очень бедные. Этим самым мы и приходим к понятию *многообразия* в простейшем частном случае (элементарное многообразие).

Мы можем теперь дать следующее определение. *Элементарным многообразием (n измерений и класса N) мы будем называть любое множество $\mathfrak{M}$, для которого задано взаимно однозначное отображение на связную область изменения n переменных $x^1, \ldots, x^n$, но задано лишь с точностью до произвольного преобразования этих переменных в новые переменные по схеме* (80.1) *(включая условие непрерывной дифференцируемости порядка N).*

Обозначая область изменения переменных $x^1, \ldots, x^n$ через Ω, а элементы множества через M, можно записать отображение в виде

$$M \leftrightarrow (x^1, \ldots, x^n) \in \Omega. \tag{80.2}$$

Область Ω предполагается *связной*. Самым важным в определении многообразия является то, что отображение (80.2) задается с точностью до всевозможных преобразований класса N над переменными $x^1, \ldots, x^n$, т. е. с точностью до перехода к любому другому отображению

$$M \leftrightarrow (x^{1'}, \ldots, x^{n'}) \in \Omega' \tag{80.3}$$

при единственном условии, что $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ получаются из $x^1, \ldots, x^n$ (и обратно) непрерывно дифференцируемым преобразованием класса N (80.1). Другими словами, задается не одно отображение (80.2), а бесчисленное множество таких отображений, причем любые два из них, например, (80.2), (80.3), связаны преобразованием класса N (80.1), и, обратно, любое преобразование класса N (80.1), примененное к одному из заданных отображений, снова приводит к одному из заданных отображений.

Поскольку отображение (80.2) задано, таким образом, с огромной степенью неопределенности, то можно подумать, что оно ничего не может и дать для геометрии многообразия. Но это не совсем так. Будем называть элементы многообразия M *точками*, заданные нам отображения (80.2) *координатными системами* в многообразии $\mathfrak{M}$ и, наконец, значения $x^1, \ldots, x^n$, отвечающие точке M в отображении (80.2),— *ее координатами* в соответствующей координатной системе. Геометрические свойства многообразия нам приходится извлекать только из отображений (80.2), так как элементам множества $\mathfrak{M}$ самим по себе никаких свойств не приписывается. Если бы при этом отображении (80.2) были бы заданы с точностью до *произвольных* взаимно однозначных преобразований области Ω в область Ω', то отсюда было бы нельзя ничего извлечь. Но потому, что эти отображения заданы с точностью до непрерывно дифференцируемых преобразований класса N, многообразие приобретает некоторые, хотя и скудные, геометрические свойства. Прежде всего в многообразии можно определить понятие предельной точки. Мы будем говорить, что переменная точка M стремится (например, по счетной последовательности положений) к предельной точке M_0, если координаты точки M стремятся к соответствующим координатам точки M_0 хотя бы в одной координатной системе x^i (т. е. хотя бы при одном из заданных отображений (80.2)). Но так как переход к другой координатной системе $x^{i'}$ совершается при помощи функций, во всяком случае непрерывных (даже при $N=0$), то наше определение *имеет смысл, независимый от выбора координатной системы*. Аналогично обстоит дело и с понятием области (открытого множества) $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$, которое определяется посредством координатной системы так же, как и область в арифметическом пространстве в § 75. Далее, пользуясь снова какой-нибудь координатной системой в многообразии, нетрудно определить в нем кривые, их касание между собой того или иного порядка, поверхности и еще ряд геометрических конструкций; мы не останавливаемся на всем этом более подробно, так как дальше будем заниматься этим систематически. Оказывается, что такого рода определения формулируются так, что их смысл не зависит от той координатной системы, которой мы в данный момент пользуемся, и тем самым наши конструкции определены действительно для самого *многообразия*.

Резюмируя, можно сказать, что элементарное многообразие (класса N) воплощает в себе те свойства области изменения переменных $x^1, \ldots, x^n$, которые инвариантны при любом взаимно однозначном и непрерывно дифференцируемом преобразовании (класса N) этих переменных в новые переменные $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ *). Чем больше N, тем меньшее количество преобразований мы допускаем, тем большим количеством свойств обладает многообразие. Все, что имеет место для многообразия данного класса, и подавно имеет место для многообразия высшего класса. Многообразие наиболее бедное свойствами мы получаем при $N=0$, т. е. когда

*) Абсолютно недопустимо и лишено смысла «подсовывать» многообразию то, что ему по определению не принадлежит, например, строить вектор, соединяющий две данные точки, и т. п., только потому, что так делается в аффинном (или евклидовом) пространстве.

от взаимно однозначных преобразований x^i в $x^{i'}$ требуется лишь непрерывность. В этом случае мы имеем многообразие в топологическом смысле. В этой и следующих главах достаточно потребовать, чтобы многообразие было, по крайней мере, 2-го класса; в главе VIII класс придется повысить до $N=3$, а в некоторых ее параграфах и еще больше. Допускается и значение $N=\infty$.

Все, что до сих пор было сказано, относилось к многообразиям простейшего вида, которые мы назвали *элементарными*. Не давая пока точных определений (см. § 84), мы постараемся составить хотя бы грубо наглядное представление о многообразии вообще.

Начнем с двумерного случая $N=2$. Моделями различных двумерных многообразий могут служить поверхности в обычном евклидовом пространстве, например, эллиптический параболоид, сфера, тор, полусфера и т. д. Если рассматриваемая поверхность имеет край, то он в поверхность не включается. Например, полусфера берется без ограничивающей ее окружности большого круга.

Когда мы рассматриваем поверхность, как модель многообразия, мы, конечно, игнорируем ее обычные геометрические свойства и вообще интересуемся этой поверхностью лишь с точностью до ее непрерывно дифференцируемого преобразования определенного класса N; действительно такое преобразование переносит координатные системы (класса N) с одной поверхности на другую. Таким образом, целая плоскость, внутренность круга, полусфера, эллиптический параболоид, гиперболический параболоид и т. п. *как многообразия* между собой эквивалентны. Действительно, все эти поверхности допускают взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение друг на друга. В частности, они отображаются на целую плоскость XOY, т. е. на область изменения переменных x, y, $-\infty < x$, $y < +\infty$. Тем самым перечисленные многообразия являются *элементарными* двумерными многообразиями; существуют и не эквивалентные им (например, кольцо между двумя концентрическими окружностями на плоскости представляет собой существенно иное, хотя тоже элементарное многообразие).

Но многообразие, моделью которого служит сфера, будет уже неэлементарное многообразие, так как сфера не допускает взаимно однозначного и непрерывного отображения ни на какой кусок плоскости, т. е. ни на какую область изменения двух переменных x, y. Это равносильно тому, что сферу в целом нельзя отнести к какой-либо координатной системе x^1, x^2 при обычных предположениях взаимной однозначности и непрерывности соответствия.

Однако сферу можно склеить из двух полусфер, которые представляют собой элементарные многообразия и допускают каждая координатную систему x^1, x^2. При этом, чтобы не выпала окружность большого круга, по которой полусферы должны склеиваться, но которая им не принадлежит, мы одну из полусфер возьмем несколько продолженной за ее границу посредством пояска, наставленного по ее краю, причем этот поясок будет наклеиваться на соответствующую часть второй полусферы. Аналогичным образом и многообразие, представленное тором (и, конечно, тоже неэлементарное), можно склеить, например, из заходящих один на другой четырех кусков в виде искривленных и деформированных прямоугольников, которые по отдельности представляют собой, конечно, элементарные многообразия.

Из этих наглядных примеров можно почерпнуть общую идею: произвольное двумерное многообразие можно определить как результат последовательного склеивания заходящих одно на другое элементарных двумерных многообразий. Двумерное многообразие, полученное в результате такого склеивания, ведет себя в малом, в окрестности каждой точки, совершенно так же, как и элементарное многообразие. Это видно хотя бы из того, что достаточно малая окрестность точки принадлежит одному из составляющих элементарных многообразий. Но в целом неэлементарное многообразие своими топологическими свойствами существенно отличается от элементарного.

Совершенно аналогичная идея лежит в основе понятия n-мерного многообразия. Оно составляется по существу путем склеивания (т. е. частичного отождествления) заходящих одно в другое элементарных n-мерных многообразий. Для неэлементарного многообразия в целом нельзя ввести координатную систему $x^1, \ldots, x^n$ с обычными требованиями взаимной однозначности и непрерывности соответствия; но это можно делать по отдельности для тех элементарных кусков, из которых оно составлено.

Конечно, грубые описания, которые нами даны, не содержат точного определения многообразия. Однако мы не очень пострадаем, если ограничимся ими, по следующей причине.

Мы будем в дальнейшем заниматься *дифференциальной* геометрией многообразия, а для этого достаточно каждый раз иметь в своем распоряжении лишь некоторую окрестность рассматриваемой точки. В пределах же такой окрестности многообразие всегда можно считать элементарным. *Поэтому дальнейшие построения мы обычно будем вести так, как если бы многообразие было элементарным, в частности, пользоваться координатными системами $x^1, \ldots, x^n$, где $x^1, \ldots, x^n$ пробегают некоторую область изменения Ω.* При этом нужно помнить, однако, что мы имеем в виду координаты, введенные в отдельных составляющих элементарных многообразиях. В тех частях, где эти многообразия накладываются одно на другое, соответствующие координаты связаны зависимостью (80.1) класса N. Точное определение (неэлементарного) многообразия мы дадим позже (§ 84).