## § 81. Тензоры в многообразии

Переходя к геометрии многообразия, необходимо хорошо понять, что по сравнению с аффинным (и, тем более, евклидовым) пространством мы очень много потеряли. В нашем распоряжении нет больше векторов, которые можно было строго определенным образом переносить из точки в точку, что придавало пространству строго оформленный, жесткий характер. Теперь у нас нечто аморфное и пластичное, так как вся геометрия многообразия должна быть извлечена лишь из задания в нем множества координатных систем (80.2):

$$M \leftrightarrow (x^1, \ \ldots, \ x^n) \in \Omega,$$

связанных между собой произвольными взаимно однозначными и $N$ раз непрерывно дифференцируемыми преобразованиями.

Тем не менее, понятие *тензора в данной точке многообразия* без труда копируется с соответствующего понятия для аффинного пространства в криволинейных координатах.

*Мы говорим, что в данной точке $M$ задан тензор, например, один раз контравариантный и два раза ковариантный, если в каждой системе координат $x^1, \ \ldots, \ x^n$ нам задана система чисел $V^i_{jk}(M)$, преобразующихся при переходе к другим координатам $x^{1'}, \ \ldots, \ x^{n'}$ по закону*

$$V^{i'}_{j'k'}(M) = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(M) \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}(M) \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}(M) V^i_{jk}(M), \tag{81.1}$$

*где частные производные вычислены в точке $M$* (именно в этом и проявляется то обстоятельство, что тензор задан в точке $M$).

Большей частью нам придется рассматривать не отдельный тензор, а *тензорное поле*, когда тензор данного строения, например, $V^i_{jk}$, задан в каждой точке $M$ многообразия (или, по крайней мере, в каждой точке некоторой поверхности или линии в нем). Тогда координаты тензора в каждой системе координат $x^1, \ \ldots, \ x^n$ являются определенными функциями точки

$$V^i_{jk} = V^i_{jk}(M) = V^i_{jk}(x^1, \ \ldots, \ x^n), \tag{81.2}$$

причем здесь и везде далее эти функции мы считаем $N-1$ раз непрерывно дифференцируемыми. При переходе в новую координатную систему действует закон преобразования (81.1). Мы знаем, что $x^{i'}(x^1, \ \ldots, \ x^n)$, равно как и $x^i(x^{1'}, \ \ldots, \ x^{n'})$, суть $N$ раз непрерывно дифференцируемые функции; отсюда следует, что условие $N-1$-кратной непрерывной дифференцируемости для $V^i_{jk}$ сохраняется и при переходе к $V^{i'}_{j'k'}$ (так как оно имеет место для множителей $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$, $\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$, появляющихся при преобразовании (81.1)).

Мы видим, что задание тензорного поля в многообразии с формальной стороны вполне совпадает с заданием тензорного поля в криволинейных координатах аффинного пространства (§ 76). И в том и в другом случае в данной системе координат $x^1, \ldots, x^n$ координаты тензора задаются как функции точки, и в том и в другом случае они преобразуются по закону (81.1) (который представляет собой повторение закона (76.12)).

Разница лишь в том, что в аффинном пространстве мы могли трактовать $V^i_{jk}(M)$ как координаты тензора, *вычисленные относительно локального аффинного репера в точке* $M$. В многообразии это невозможно, так как в нем не существует векторов, а тем самым и аффинных реперов, в том числе и локальных. Поэтому, давая наши определения тензора в точке и тензорного поля *для многообразия*, мы были вынуждены скопировать именно формальную сторону дела. Если угодно, роль локальных реперов в точке $M$ играют у нас сами координатные системы $x^1, \ldots, x^n$, *рассматриваемые в бесконечно малой окрестности точки* $M$. В следующем параграфе мы геометризируем понятие о координатной системе $x^1, \ldots, x^n$, рассматриваемой в бесконечно малом вблизи $M$, в виде *локального репера в касательном пространстве.*

Для того чтобы задать тензор данного строения в определенной точке $M$, достаточно произвольно задаться его координатами $V^i_{jk}$ в одной какой-либо координатной системе $x^i$. Тогда в любой другой координатной системе $x^{i'}$ координаты тензора $V^{i'}_{j'k'}$ определятся по закону (81.1), причем этот же закон преобразования уже автоматически будет действовать и при переходе от любой координатной системы $x^{i'}$ к любой координатной системе $x^{i''}$. Последнее выводится совершенно так же, как и в § 32; разница лишь в обозначениях, а именно, роль взаимно обратных матриц $\|A^{i'}_i\|$ и $\|A^i_{i'}\|$ играют у нас $\left\|\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right\|$, $\left\|\dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right\|$. При этом соотношения $A^i_{i''}=A^i_{i'}A^{i'}_{i''}$, $A^{i''}_i=A^{i''}_{i'}A^{i'}_i$, используемые при выводе, имеют место и у нас:

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{i''}}=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i''}}, \qquad \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^i}=\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}. \tag{81.3}$$

Действительно, это не что иное, как формулы дифференцирования сложных функций $x^i$ от $x^{i''}$ (и наоборот) при промежуточных аргументах $x^{i'}$. Если нам нужно задать тензор не в одной лишь точке, а целое тензорное поле, то в соответствии со сказанным можно задаться произвольными $N-1$ раз непрерывно дифференцируемыми функциями

$$V^i_{jk}(M)=V^i_{jk}(x^1, \ldots, x^n) \tag{81.4}$$

в данной координатной системе $x^i$. Тем самым в каждой точке $M$ будет определен тензор поля, координаты которого в любой другой координатной системе $x^{i'}$ определяются теми же формулами (81.1). Аналогичным образом можно поступать и в тех случаях, когда тензорное поле задается в многообразии лишь на некоторой поверхности или линии.

Все операции тензорной алгебры со всеми их свойствами, установленные нами в главе II, переносятся дословно и на тензоры, заданные *в одной и той же точке* нашего многообразия. Действительно, расхождение с главой II будет здесь лишь в обозначениях: роль $A^i_{i'}$, $A^{i'}_i$ в тензорном законе преобразования будут играть $\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}(M)$ и $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(M)$.

Зато тензоры, заданные *в разных* точках многообразия, отделены друг от друга, так сказать, пропастью: их нельзя даже сравнивать между собой, не говоря уже о том, чтобы производить над ними совместно какие-либо операции.

В самом деле, желая сравнить два тензора, заданных в разных точках $M_1$ и $M_2$, мы должны были бы каким-то образом в окрестности $M_1$ и в окрестности $M_2$ согласовать координатные системы, в которых вычисляются координаты этих тензоров. Но для такого согласования в *многообразии* нельзя указать никакого приема. Ввиду широкого произвола в допустимых преобразованиях координат $x^1, \ldots, x^n$ из задания координатной системы в окрестности $M_1$ нельзя извлечь никаких указаний на построение координатной системы в окрестности $M_2$.

Эту же мысль можно выразить и так: допустим, что два тензора в точках $M_1$ и $M_2$ имеют одинаковые координаты в данной координатной системе $x^i$:

$$V^i_{jk}(M_1) = V^i_{jk}(M_2).$$

Тем не менее эти тензоры не могут считаться равными, так как при переходе к новым координатам $x^{i'}$ указанное равенство, вообще говоря, нарушится. Это произойдет потому, что в законе преобразования (81.1) в первом случае будут фигурировать $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(M_1)$, а во втором случае $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(M_2)$, вообще говоря, не равные между собой.

Операции тензорной алгебры переносятся также и на тензорные поля в многообразии, а именно, операции над полями определяются как операции над тензорами этих полей, *производимые в каждой точке $M$ по отдельности*. Так, сложение тензорных полей (одинакового строения), например, $V^{ij}_k(M)$ и $U^{ij}_k(M)$, определяется как составление нового тензорного поля

$$W_k^{ij}(M) = V_k^{ij}(M) + U_k^{ij}(M);$$

умножение тензорных полей, например, $V_p^i(M)$, $U_q^{jk}(M)$, определяется как составление нового тензорного поля

$$W_{pq}^{ijk}(M) = V_p^i(M)\, U_q^{jk}(M);$$

свертывание тензорного поля, например, $W_{pq}^{ijk}(M)$, по второму верхнему и первому нижнему индексам означает построение нового тензорного поля

$$W_q^{ik}(M) = W_{sq}^{isk}(M);$$

наконец, подстановка индексов означает переход от тензорного поля, например, $W_{pq}^{ijk}(M)$, к тензорному полю того же строения $Z_{pq}^{ijk}(M)$, например, следующим образом:

$$Z_{pq}^{ijk}(M) = W_{qp}^{jki}(M).$$

Именно потому, что операции над тензорными полями сводятся таким образом к операциям над тензорами, *взятыми каждый раз в одной и той же точке $M$, эти операции сохраняют все свои обычные свойства.* Для краткости мы в дальнейшем часто будем говорить просто «тензор», имея в виду тензорное поле.

В противоположность алгебраическим операциям операция абсолютного дифференцирования тензорного поля в многообразии не существует. В процессе дифференцирования нужно прежде всего брать приращение тензора при переходе из данной точки в бесконечно близкую, т. е. вычитать тензор в одной точке из тензора в другой точке, а это в многообразии не имеет никакого смысла. Если же попробовать обойти это формальным дифференцированием координат тензора поля, например, $V_{kj}^i(x^1, \ldots, x^n)$, по координатам точки, то полученные величины $\frac{\partial V_{kj}^i}{\partial x^p}$ *не образуют тензора.* В самом деле, продифференцируем закон преобразования (81.1) почленно по $x^{p'}$ и получим тем самым величины $\frac{\partial V_{k'j'}^{i'}}{\partial x^{p'}}$ в новых координатах; тогда в правых частях придется дифференцировать, кроме множителя $V_{kj}^i$, множители $\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}$ и т. д., что приводит к дополнительным членам, портящим тензорный закон преобразования для $\frac{\partial V_{kj}^i}{\partial x^p}$. Более того, $\frac{\partial V_{k'j'}^{i'}}{\partial x^{p'}}$ зависят не только от $\frac{\partial V_{kj}^i}{\partial x^p}$ но и от самих $V_{kj}^i$.