§ 82. Касательное аффинное пространство

Опираясь на то, что в каждой точке M многообразия $\mathfrak{M}_n$ можно построить тензоры с обычными свойствами, мы постараемся геометризировать понятие многообразия, насколько это возможно. Особое значение в этом смысле будут иметь один раз контравариантные тензоры ξ^i. В аффинном пространстве такой тензор определил бы нам вектор; но в многообразии у нас пока векторов нет, да в настоящем смысле слова никогда и не будет. Но мы все же постараемся связать *с каждым тензором* ξ^i *в данной точке* M *нашего многообразия вектор* ξ *в некотором условном смысле.* А именно, возьмем экземпляр n-мерного аффинного пространства A_n с отмеченной в нем точкой O. *Отобразим каждый тензор* ξ^i *в данной точке* M *в некоторый вектор* ξ *пространства* A_n *так, чтобы умножению тензора* ξ^i *на число и сложению двух тензоров* ξ^i *и* η^i *отвечали такие же операции над соответствующими векторами:*

$$\text{если } \eta^i = \alpha\xi^i, \qquad \text{то } \boldsymbol{\eta} = \alpha\boldsymbol{\xi}, \tag{82.1}$$

$$\text{если } \zeta^i = \xi^i + \eta^i, \qquad \text{то } \boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}. \tag{82.2}$$

Кроме того, мы требуем, чтобы *в этом отображении получались все векторы* ξ *пространства* A_n, а не происходило бы, например, отображение всех тензоров ξ^i в вектор-нуль.

Искомое отображение нетрудно построить следующим образом. Выберем среди тензоров ξ^i в точке M n линейно независимы.

$$\xi^i_{(1)}, \ \xi^i_{(2)}, \ \ldots, \ \xi^i_{(n)},$$

т. е. удовлетворяющих условию

$$\operatorname{Det} |\xi^i_{(j)}| \neq 0.$$

Тогда любой тензор ξ^i можно разложить по этим с некоторыми коэффициентами

$$\xi^i = \alpha^{(1)}\xi^i_{(1)} + \ldots + \alpha^{(n)}\xi^i_{(n)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{82.3}$$

где коэффициенты $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ без труда определяются из выписанной системы n уравнений с n неизвестными.

Теперь в A_n выберем произвольно n линейно независимых векторов

$$\boldsymbol{\xi}_{(1)}, \ \boldsymbol{\xi}_{(2)}, \ \ldots, \ \boldsymbol{\xi}_{(n)}$$

и каждому тензору ξ^i (82.3) сопоставим вектор ξ, в A_n определяемый формулой

$$\boldsymbol{\xi} = \alpha^{(1)}\boldsymbol{\xi}_{(1)} + \ldots + \alpha^{n}\boldsymbol{\xi}_{(n)}. \tag{82.4}$$

Ясно, что отображение будет взаимно однозначным с соблюдением условий (82.1), (82.2). Следует подчеркнуть, что наше отображение относится именно *к тензорам* независимо от того, в какой координатной системе x^i они рассматриваются, и носит, таким образом, инвариантный характер.

Мы условимся, кроме того, отображать данную точку M многообразия $\mathfrak{M}_n$ в точку O пространства A_n; можно даже для наглядности представлять себе их отождествленными, так что пространство A_n «пришпилено» к многообразию $\mathfrak{M}_n$ в данной его точке M.

Итак, для каждой точки M многообразия $\mathfrak{M}_n$ мы строим аффинное пространство A_n, имеющее с многообразием одну общую точку M, причем тензоры ξ^i в точке M с сохранением линейных зависимостей между ними изображаются векторами $\boldsymbol{\xi}$ в A_n. Такое пространство A_n называется *касательным аффинным пространством, а его векторы $\boldsymbol{\xi}$ — касательными векторами в данной точе M многообразия $\mathfrak{M}_n$.* Впрочем мы будем кратко называть векторы $\boldsymbol{\xi}$ просто *векторами в данной точке M*, подразумевая, что они принадлежат касательному пространству в этой точке. На первый взгляд кажется, что касательное пространство привязано к многообразию внешне и искусственно и с геометрической стороны ничем не может его оживить. В действительности, однако, связь здесь более глубокая.

Рассмотрим кривую, проходящую через данную точку M многообразия $\mathfrak{M}_n$. Под кривой в многообразии мы будем понимать множество точек, заданных параметрическими уравнениями

$$x^i = x^i(t), \tag{82.5}$$

причем будем предполагать, что $\frac{dx^i}{dt}$ не обращаются в нуль одновременно; функции $x^i(t)$ N раз непрерывно дифференцируемы.

Пусть при данном значении t мы находимся в точке M, а при $t+dt$ попадаем в бесконечно близкую точку M'. Дифференциалы координат $dx^i = dx^i(t)$ образуют в точке M один раз контравариантный тензор. Действительно, при переходе в многообразии к новым координатам

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, \ldots, x^n) \tag{82.6}$$

мы для того же бесконечно малого смещения по нашей кривой получаем по формуле полного дифференциала

$$dx^{i'}(t) = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(M)\, dx^i(t), \tag{82.7}$$

а это означает тензорный закон преобразования для dx^i. Но в таком случае в касательном аффинном пространстве тензору $\xi^i = dx^i(t)$ должен отвечать (бесконечно малый) вектор, который мы обозначим $d\mathbf{x}$.

Итак, бесконечно малому смещению из точки M по кривой в многообразии $\mathfrak{M}_n$ отвечает бесконечно малый вектор $d\mathbf{x}$ в касательном пространстве A_n в точке M. Этот вектор играет примерно ту же роль, что и дифференциал $d\mathbf{x}$ радиуса-вектора $\mathbf{x}$ в аффинном пространстве (§ 65). Но разница в том, что кривая теперь лежит в многообразии, радиуса-вектора $\mathbf{x}$ (как и вообще векторов) в многообразии не существует, и аналог вектора $d\mathbf{x}$ удается построить лишь в касательном в данной точке аффинном пространстве A_n.

Как и в § 65, вектор $d\mathbf{x}$ определяет отвечающее ему бесконечно малое смещение лишь с точностью 1-го порядка, так как задание $d\mathbf{x}$ равносильно заданию $dx^i(t)$, для самого же смещения нужно было бы знать $\Delta x^i(t)$.

Тем не менее полученная геометрическая картина имеет большое значение. Представим себе, что *из точки M по всевозможным направлениям берутся бесконечно малые смещения в многообразии. Все эти смещения находят себе изображение в виде вполне определенных бесконечно малых смещений (векторов $d\mathbf{x}$) из той же точки M в касательном пространстве, правда, если пренебречь бесконечно малыми высшего порядка.* Тем самым касательное пространство не только «пришпилено» к многообразию в точке M, но и как бы «сливается с ним» в бесконечно малой окрестности точки M, однако лишь с точностью 1-го порядка. Теперь ясна аналогия между касательным пространством и касательной плоскостью, например, к обыкновенной поверхности. Смещаясь из данной точки M на поверхности в бесконечно близкую точку M' по какой-либо кривой, мы можем, пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка, выразить это смещение бесконечно малым вектором в касательной плоскости. Таким же свойством обладает касательное пространство по отношению к многообразию (однако при этом не обязательно мыслить их вложенными в некоторое объемлющее пространство).

В дальнейшем мы будем говорить кратко «вектор ξ^i в точке M», имея в виду соответствующий вектор $\boldsymbol{\xi}$ в касательном пространстве A_n в точке M. В частности, под «вектором dx^i» мы будем понимать вектор $d\mathbf{x}$. Следует подчеркнуть, что *касательные пространства A_n, взятые в разных точках многообразия $\mathfrak{M}_n$, не имеют между собой ничего общего.* У нас нет никаких данных для того, чтобы вектор, взятый в точке M_1 каким-либо мотивированным образом, отложить в точке M_2. Мы увидим далее, что устранение этого пробела будет означать превращение многообразия в пространство аффинной связности.

Вернемся к кривой (82.5). Рассмотрим вместо дифференциалов dx^i производные $\frac{dx^i}{dt}$ в данной точке M. Они, очевидно, тоже образуют тензор. Действительно, считая, что в (82.6) x^i зависят от t согласно (82.5), и дифференцируя по t, получаем:

$$\frac{dx^{i'}}{dt}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt}, \tag{82.8}$$

т. е. $\frac{dx^i}{dt}$ подчиняются тензорному закону преобразования. Следовательно, тензору $\xi^i=\frac{dx^i}{dt}$ должен в касательном пространстве отвечать определенный вектор ξ, который мы *будем называть касательным вектором к нашей кривой в точке M* $\left(\text{или просто «вектором } \frac{dx^i}{dt}\text{»}\right)$. Конечно, касательный вектор определяется неоднозначно; при непрерывно дифференцируемом и обратимом преобразовании параметра

$$\tau=\tau(t),\quad t=t(\tau)$$

этот вектор умножается на $\frac{dt}{d\tau}$:

$$\frac{dx^i}{d\tau}=\frac{dx^i}{dt}\frac{dt}{d\tau}.$$

Таким образом, он будет определен в данной точке для данной кривой с точностью до численного множителя $\frac{dt}{d\tau}$. Другими словами, все касательные векторы в данной точке M данной кривой коллинеарны, а потому они указывают в касательном пространстве вполне определенную проходящую через точку M прямую; ее мы будем называть *касательной* к нашей кривой. Итак, касательная к кривой, заданной в многообразии, лежит не в многообразии, а в касательном пространстве в соответствующей точке M.

Отметим, наконец, что утраченный нами в многообразии *локальный аффинный репер* возрождается снова в касательном пространстве. А именно, задавшись в многообразии координатной системой x^i, рассмотрим в какой-нибудь точке M тензоры $\xi^i_{(1)}, \xi^i_{(2)},\ldots,\xi^i_{(n)}$, имеющие в *данной координатной системе* x^i следующие координаты:

$$\left.\begin{array}{l}\xi^1_{(1)},\ \xi^2_{(1)},\ \ldots,\ \xi^n_{(1)}=1,\ 0,\ \ldots,\ 0,\\ \xi^1_{(2)},\ \xi^2_{(2)},\ \ldots,\ \xi^n_{(2)}=0,\ 1,\ \ldots,\ 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \xi^1_{(n)},\ \xi^2_{(n)},\ \ldots,\ \xi^n_{(n)}=0,\ 0,\ \ldots,\ 1.\end{array}\right\} \tag{82.9}$$

В краткой записи

$$\xi^i_{(j)}=\delta^i_j.$$

Отвечающие этим тензорам векторы *в касательном пространстве* A_n обозначим соответственно $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ и будем называть репер

$\{M, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в A_n локальным репером в данной точке M и в *данной координатной системе* x^i. Значение локального репера основано на следующем факте: *если тензору* ξ^i *в точке* M *отвечает в касательном пространстве вектор* ξ, *то его координаты относительно локального репера совпадают* с ξ^i. При этом предполагается, что координаты тензора ξ^i берутся в той же координатной системе x^i, в которой построен локальный репер. В самом деле, как видно из таблицы (82.9), всякий тензор ξ^i может быть разложен по тензорам $\xi^i_{(1)}, \ldots, \xi^i_{(n)}$ с коэффициентами $\xi^1, \ldots, \xi^n$. Соответственно этому при переходе к векторам касательного пространства получаем:

$$\xi = \xi^1\mathbf{e}_1 + \ldots + \xi^n\mathbf{e}_n, \tag{82.10}$$

откуда и вытекает, что координаты вектора ξ относительно локального репера равны $\xi^1, \ldots, \xi^n$.

Из определения локального репера видно, что он зависит от той координатной системы x^i, к которой отнесено многообразие. Можно даже уточнить это: вектор $\mathbf{e}_k$ есть касательный вектор к координатной линии x^k, отнесенной к параметру $t = x^k$. Действительно, вычисляем касательный вектор при $k = 1$

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial x^1} = \delta^i_1,$$

а значит, этот касательный вектор совпадает с $\mathbf{e}_1$.

При переходе к новой координатной системе $x^{i'}$ векторы локального репера в каждой точке M преобразуются по закону

$$\mathbf{e}_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}(M)\,\mathbf{e}_i \tag{82.11}$$

(т. е. так же, как и в криволинейных координатах в аффинном пространстве). В самом деле, поскольку координаты ξ^i любого вектора ξ относительно локального репера совпадают с координатами соответствующего тензора ξ^i, то они преобразуются по закону

$$\xi^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(M)\,\xi^i, \tag{82.12}$$

а следовательно, векторы репера $\mathbf{e}_i$ должны преобразоваться при помощи транспонированной обратной матрицы, т. е. согласно (82.11). Конечно, эту формулу нетрудно проверить и непосредственно, если учесть, что $\mathbf{e}_{i'}$ имеют координаты $\delta^{k'}_{i'}$ в новом локальном репере. Тем самым в старом локальном репере они имеют координаты $\xi^k_{i'} = \dfrac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\delta^{k'}_{i'} = \dfrac{\partial x^k}{\partial x^{i'}}$, а именно это и выражает разложение (82.11).

Из формул (82.11), (82.12) следует общий результат, окончательно выясняющий роль локальных реперов в точке M. Координаты тензора, например V^i_{jk}, заданного в точке M многообразия $\mathfrak{M}_n$, ведут себя в то же время как координаты тензора в касательном пространстве, взятые относительно локального репера. Действительно, преобразование координат x^i влечет за собой преобразование локального репера (82.11). Рассмотрим тензор, например V^i_{jk}, *в касательном пространстве, отнесенный к локальному реперу;* закон преобразования его координат будет:

$$V^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(M)\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}(M)\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}(M)\,V^i_{jk},$$

так как (82.11) дает образец преобразования для ковариантных индексов, а (82.12) — два контравариантных. Но этот же вид имеет закон преобразования (81.1) для координат тензора в данной точке M многообразия $\mathfrak{M}_n$. *Поэтому безразлично, сказать ли, что V^i_{jk} суть координаты тензора в многообразии $\mathfrak{M}_n$ в данной его точке M относительно координатной системы x^i или в касательном аффинном пространстве A_n в точке M относительно соответствующего локального репера.* Закон преобразования в обоих случаях будет один и тот же.

§ 83. Поверхности в многообразии

Под элементарной *m-мерной поверхностью* $\mathfrak{M}_m$ в n-мерном элементарном многообразии $\mathfrak{M}_n$ мы будем понимать множество точек, заданных параметрическими уравнениями

$$x^i = x^i(u^1, \ldots, u^m) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{83.1}$$

где $u^1, \ldots, u^m$ — независимые переменные (параметры), пробегающие некоторую связную m-мерную область изменения Ω_u. При этом мы будем предполагать функции $x^i(u^1, \ldots, u^m)$ непрерывно дифференцируемыми N раз (N — класс многообразия) и удовлетворяющими условию *регулярности поверхности:*

$$\text{ранг матрицы } \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^m} & \frac{\partial x^2}{\partial u^m} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^m} \end{matrix} \right\| \text{ равен } m, \tag{83.2}$$