Из формул (82.11), (82.12) следует общий результат, окончательно выясняющий роль локальных реперов в точке M. Координаты тензора, например V^i_{jk}, заданного в точке M многообразия $\mathfrak{M}_n$, ведут себя в то же время как координаты тензора в касательном пространстве, взятые относительно локального репера. Действительно, преобразование координат x^i влечет за собой преобразование локального репера (82.11). Рассмотрим тензор, например V^i_{jk}, *в касательном пространстве, отнесенный к локальному реперу;* закон преобразования его координат будет:

$$V^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(M)\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}(M)\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}(M)\,V^i_{jk},$$

так как (82.11) дает образец преобразования для ковариантных индексов, а (82.12) — два контравариантных. Но этот же вид имеет закон преобразования (81.1) для координат тензора в данной точке M многообразия $\mathfrak{M}_n$. *Поэтому безразлично, сказать ли, что V^i_{jk} суть координаты тензора в многообразии $\mathfrak{M}_n$ в данной его точке M относительно координатной системы x^i или в касательном аффинном пространстве A_n в точке M относительно соответствующего локального репера.* Закон преобразования в обоих случаях будет один и тот же.

§ 83. Поверхности в многообразии

Под элементарной *m-мерной поверхностью* $\mathfrak{M}_m$ в n-мерном элементарном многообразии $\mathfrak{M}_n$ мы будем понимать множество точек, заданных параметрическими уравнениями

$$x^i = x^i(u^1, \ldots, u^m) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{83.1}$$

где $u^1, \ldots, u^m$ — независимые переменные (параметры), пробегающие некоторую связную m-мерную область изменения Ω_u. При этом мы будем предполагать функции $x^i(u^1, \ldots, u^m)$ непрерывно дифференцируемыми N раз (N — класс многообразия) и удовлетворяющими условию *регулярности поверхности:*

$$\text{ранг матрицы} \left\|\begin{matrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^m} & \frac{\partial x^2}{\partial u^m} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^m} \end{matrix}\right\| \text{ равен } m, \tag{83.2}$$

т. е. строки этой матрицы линейно независимы. Элементарная выкладка показывает, что это условие инвариантно относительно любого преобразования координат x^i в $\mathfrak{M}_n$.

Число измерений m нашей поверхности может принимать значения $1, 2, \ldots, n-1$. При $m=1$ мы возвращаемся к *кривой* (82.5), причем условие (83.2) в этом случае означает, что состоящая из одной строки матрица

$$\left\| \frac{\partial x^1}{\partial t} \frac{\partial x^2}{\partial t} \cdots \frac{\partial x^n}{\partial t} \right\| \tag{83.3}$$

имеет ранг 1, т. е. выписанные производные не обращаются в нуль одновременно (это мы предполагали и для кривой (82.5)). В случае $m=n-1$ поверхность называется *гиперповерхностью*; условие (83.2) принимает вид

$$\text{ранг матрицы} \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^{n-1}} & \frac{\partial x^2}{\partial u^{n-1}} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^{n-1}} \end{matrix} \right\| \text{ равен } n-1. \tag{83.4}$$

Смысл условия (83.2) состоит в том, чтобы предотвратить появление особых точек на поверхности и, особенно, ее вырождение в образ меньшего числа измерений. Так, если функции, стоящие в правых частях (83.1), являются константами, то, конечно, условия дифференцируемости соблюдаются прекрасно; но поверхность вырождается в точку. Условие (83.2) делает, однако, невозможным как этот, так и другие не столь грубые случаи вырождения (например, когда при $m=5$ поверхность оказывается фактически двумерной и т. п.).

Более точно, условие (83.2) означает следующее. Допустим для простоты, что в данной точке ранговый минор образован первыми m столбцами:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^m}{\partial u^1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^m} & \cdots & \frac{\partial x^m}{\partial u^m} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда функциональная зависимость первых m текущих координат x^1 от $u^1, \ldots, u^m$

$$x^1 = x^1(u^1, \ldots, u^m), \ \ldots, \ \ x^m = x^m(u^1, \ldots, u^m)$$

обладает якобианом, отличным от нуля, и поэтому ее в окрестности данной точки можно обратить:

$$u^1 = u^1(x^1, \ldots, x^m), \ \ldots, \ \ u^m = u^m(x^1, \ldots, x^m).$$

Вставляя эти (тоже N раз непрерывно дифференцируемые) функции вместо $u^1, \ldots, u^m$ в остальные уравнения (81.1) ($i = m+1, m+2, \ldots$ $\ldots, n$), мы получим уравнения поверхности в виде

$$\left.\begin{aligned} x^{m+1} &= f_{m+1}(x^1, \ldots, x^m), \\ x^{m+2} &= f_{m+2}(x^1, \ldots, x^m), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n &= f_n(x^1, \ldots, x^m). \end{aligned}\right\} \tag{83.5}$$

Итак, в окрестности каждой данной точки уравнения поверхности (с точностью до нумерации координат x^i) можно записать в виде (83.5). Здесь роль независимых параметров $u^1, \ldots, u^m$ играют координаты $x^1, \ldots, x^m$, а потому все m параметров являются здесь существенными в том смысле, что любое их изменение влечет за собой смещение точки поверхности. Вырождение m-мерной поверхности в образ низшего числа измерений, т. е. возможность задать ее при помощи меньшего числа параметров, здесь, очевидно, отпадает; особые точки также становятся невозможными.

Элементарную поверхность всегда можно рассматривать как m-мерное элементарное многообразие. Действительно, не меняя поверхности, можно подвергать параметры u^α на ней взаимно однозначному и в обе стороны N раз непрерывно дифференцируемому преобразованию

$$u^{\alpha'} = f_\alpha(u^1, \ldots, u^m), \quad u^\alpha = g_\alpha(u^{1'}, \ldots, u^{m'}). \tag{83.6}$$

Здесь $u^1, \ldots, u^m$ пробегают область изменения Ω_u, а $u^{1'}, \ldots, u^{m'}$ — некоторую область изменения Ω'_u. Ясно, что после такого преобразования параметров уравнения поверхности можно снова записать в виде

$$x^i = x^i(u^{1'}, \ldots, u^{m'}),$$

где новые функции $x^i(u^{1'}, \ldots, u^{m'})$ удовлетворяют прежним условиям, в том числе и (83.2), как можно показать после простой выкладки. Рассматривая параметры u^α как координаты на поверхности, заданные с точностью до указанного преобразования, мы вправе считать нашу поверхность m-мерным элементарным многообразием $\mathfrak{M}_m$ согласно определению последнего (§ 80). В связи с этим все построения, сделанные нами для многообразия $\mathfrak{M}_n$ в координатах $x^1, \ldots, x^n$, повторяются и для нашей поверхности в координатах $u^1, \ldots, u^m$. Все сказанное относится к элементарной поверхности. В общем же случае m-мерную поверхность в n-мерном многообразии $\mathfrak{M}_n$ можно определить как множество точек в $\mathfrak{M}_n$, взаимно однозначно и непрерывно в обе стороны отображенное на некоторое многообразие $\mathfrak{M}_m$, и притом так, что отдельные элементарные многообразия $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$, из которых $\mathfrak{M}_m$ «склеено», отображаются в элементарные поверхности (83.1). Тем самым любую поверхность в некоторой окрестности любой ее точки можно считать элементарной поверхностью. Так как нас дальше будут интересовать только локальные свойства, то фактически мы можем ограничиться лишь элементарными поверхностями. Так мы и будем поступать.

На поверхности можно рассматривать тензоры как в отдельных точках M, так и тензорные поля. При этом координаты тензора, например $V^{\alpha}_{\beta\gamma}$, подчинены закону преобразования

$$V^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}(M)=\frac{\partial u^{\alpha'}}{\partial u^{\alpha}}(M)\frac{\partial u^{\beta}}{\partial u^{\beta'}}(M)\frac{\partial u^{\gamma}}{\partial u^{\gamma'}}(M)V^{\alpha}_{\beta\gamma}. \qquad (83.7)$$

Кривую на поверхности мы будем задавать уравнениями

$$u^1=u^1(t), \quad \ldots, \quad u^m=u^m(t), \qquad (83.8)$$

где функции $u^{\alpha}(t)$ N раз непрерывно дифференцируемые, и $\frac{du^{\alpha}}{dt}$ не обращаются в нуль одновременно. Вставляя функции (83.8) в (83.1), мы получаем функциональную зависимость x^i от t, что действительно определяет кривую в нашем многообразии. Правда, еще нужно проверить условие (83.3). Найдем касательный вектор $\frac{dx^i}{dt}$ к этой кривой, дифференцируя x^i как сложные функции:

$$\frac{dx^i}{dt}=\frac{\partial x^i}{\partial u^{\alpha}}\frac{du^{\alpha}}{dt}. \qquad (83.9)$$

Здесь имеется в виду суммирование по $\alpha=1, 2, \ldots, m$. Вообще мы условимся считать, что греческие индексы относятся к параметрам на поверхности и пробегают значения $1, 2, \ldots, m$ в то время как латинские пробегают значения $1, 2, \ldots, n$ и относятся к многообразию $\mathfrak{M}_n$. Заметим, что согласно (83.9) строка, составленная из производных

$$\frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \ldots, \frac{dx^n}{dt},$$

представляет собой линейную комбинацию строк матрицы (83.2) с коэффициентами $\frac{du^{\alpha}}{dt}$. Эти коэффициенты, как было оговорено, не все равны нулю, а следовательно, в силу линейной независимости строк матрицы (83.2) элементы строки (83.3) не могут обращаться в нуль одновременно. Условие (83.3) проверено.

Важный геометрический смысл (83.9) состоит в том, что это соотношение «переводит» тензор $\frac{du^{\alpha}}{dt}$ на поверхности $\mathfrak{M}_m$ в тензор

$\frac{dx^i}{dt}$ в многообразии $\mathfrak{M}_n$. Связь между этими двумя тензорами является, очевидно, инвариантной и заключается в том, что они получены дифференцированием текущих координат соответственно u^α и x^i *по одному и тому же параметру вдоль одной и той же кривой в одной и той же точке.* Тем самым каждый тензор $\frac{du^\alpha}{dt}$ через посредство тензора $\frac{dx^i}{dt}$ изображается некоторым вектором в $\mathfrak{M}_n$ (т. е. в касательном пространстве A_n).

Будем проводить теперь по поверхности через данную ее точку M всевозможные кривые (83.8). Для всех этих кривых строим в точке M касательные векторы (83.9). Тогда под видом $\frac{du^\alpha}{dt}$ мы будем получать всевозможные тензоры ξ^α в $\mathfrak{M}_m$ (в данной его точке M). Им соответствуют векторы $\xi^i = \frac{dx^i}{dt}$ в $\mathfrak{M}_n$ согласно (83.9):

$$\xi^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\xi^\alpha. \tag{83.10}$$

Они представляют собой, следовательно, *всевозможные* линейные комбинации m векторов

$$\xi^i_{(1)} = \frac{\partial x^i}{\partial u^1}, \quad \ldots, \quad \xi^i_{(m)} = \frac{\partial x^i}{\partial u^m}, \tag{83.11}$$

линейно независимых в силу (83.2).

В результате векторы ξ^i, отвечающие всевозможным тензорам ξ^α в данной точке многообразия $\mathfrak{M}_m$, заполняют в касательном пространстве A_n m-мерную плоскость A_m, проходящую через M (предполагается, что векторы ξ^i откладываются от M).

Плоскость A_m можно рассматривать как *касательное пространство к многообразию $\mathfrak{M}_m$* в точке M, так как векторы ξ^i плоскости A_m служат изображением всевозможных тензоров ξ^α *в данной точке M* многообразия $\mathfrak{M}_m$ (с сохранением линейных зависимостей между ними).

С другой стороны, векторы $\xi^i = \frac{dx^i}{dt}$ суть всевозможные касательные векторы к поверхности $\mathfrak{M}_m$ в данной точке M, т. е. касательные к всевозможным кривым на $\mathfrak{M}_m$ в этой точке. Поэтому порожденную ими плоскость A_m можно рассматривать *как касательную плоскость к поверхности $\mathfrak{M}_m$*.

Первая точка зрения на A_m является, так сказать, внутренней, вторая — внешней. (Пользуясь рис. 16, нужно помнить, что изображенные на нем векторы и плоскость A_m на самом деле не принадлежат многообразию $\mathfrak{M}_n$, в котором расположена поверхность $\mathfrak{M}_m$, и, строго говоря, должны были бы изображаться отдельно в касательном пространстве A_n.)

Векторы (83.11), на которых строится A_m, являются касательными векторами к координатным линиям $u^1, \ldots, u^m$ (под координатной линией u^α мы понимаем кривую на поверхности, вдоль которой меняется лишь данный параметр u^α при постоянных значениях остальных параметров). В самом деле, если в (83.8) положить, в частности,

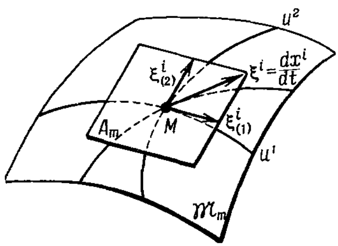

Рис. 16.

$$u^1 = t, \quad u^2 = \text{const}, \quad \ldots, \quad u^m = \text{const},$$

т. е. рассмотреть координатную линию u^1, то (83.9) дает

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial u^1},$$

что и показывает, что $\frac{\partial x^i}{\partial u^1}$ есть вектор, касательный к линии u^1. С точки зрения многообразия $\mathfrak{M}_m$ векторы (83.11) образуют локальный репер, что легко обнаружить подсчетом их координат в $\mathfrak{M}_m$: например, координаты первого из них будут $\xi^\alpha = \delta^\alpha_1$, и т. д.

§ 84. Понятие о многообразии

В этом параграфе мы дадим точное определение понятия многообразия, пользуясь уже установленным нами понятием элементарного многообразия.

Мы будем называть *n-мерным многообразием класса N множество $\mathfrak{M}$, в котором задана конечная или счетная система подмножеств* $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$, удовлетворяющая следующим условиям (элементы множества $\mathfrak{M}$ будем называть точками).

1°. Каждое подмножество $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$ есть элементарное n-мерное многообразие класса N.

2°. Каждая точка M множества $\mathfrak{M}$ входит, по крайней мере, в одно $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$.

3°. Если два подмножества $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$, $\mathfrak{M}_{(\beta)}$ пересекаются по некоторому непустому множеству $\mathfrak{N}$, то оно образует (вообще говоря, несвязную) *область* как в $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$, так и в $\mathfrak{M}_{(\beta)}$; при этом, когда точка M пробегает $\mathfrak{N}$, ее координаты y^i в $\mathfrak{M}_{(\beta)}$ являются N раз непрерывно дифференцируемыми однозначными функциями от ее координат x^i в $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$, равно как и обратно.

4°. Если M_1 и M_2 — две *различные* точки $\mathfrak{M}$, причем $M_1 \in \mathfrak{M}_{(\alpha_1)}$, $M_2 \in \mathfrak{M}_{(\alpha_2)}$ (допускается, в частности, и совпадение $\alpha_1 = \alpha_2$), то в