и, строго говоря, должны были бы изображаться отдельно в касательном пространстве A_n.)

Векторы (83.11), на которых строится A_m, являются касательными векторами к координатным линиям $u^1, \ldots, u^m$ (под координатной линией u^α мы понимаем кривую на поверхности, вдоль которой меняется лишь данный параметр u^α при постоянных значениях остальных параметров). В самом деле, если в (83.8) положить, в частности,

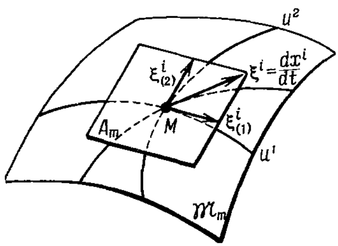

Рис. 16.

$$u^1 = t, \quad u^2 = \text{const}, \quad \ldots, \quad u^m = \text{const},$$

т. е. рассмотреть координатную линию u^1, то (83.9) дает

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial u^1},$$

что и показывает, что $\frac{\partial x^i}{\partial u^1}$ есть вектор, касательный к линии u^1. С точки зрения многообразия $\mathfrak{M}_m$ векторы (83.11) образуют локальный репер, что легко обнаружить подсчетом их координат в $\mathfrak{M}_m$: например, координаты первого из них будут $\xi^\alpha = \delta^\alpha_1$, и т. д.

§ 84. Понятие о многообразии

В этом параграфе мы дадим точное определение понятия многообразия, пользуясь уже установленным нами понятием элементарного многообразия.

Мы будем называть *n-мерным многообразием класса N множество $\mathfrak{M}$, в котором задана конечная или счетная система подмножеств* $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$, удовлетворяющая следующим условиям (элементы множества $\mathfrak{M}$ будем называть точками).

1°. Каждое подмножество $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$ есть элементарное n-мерное многообразие класса N.

2°. Каждая точка M множества $\mathfrak{M}$ входит, по крайней мере, в одно $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$.

3°. Если два подмножества $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$, $\mathfrak{M}_{(\beta)}$ пересекаются по некоторому непустому множеству $\mathfrak{N}$, то оно образует (вообще говоря, несвязную) *область* как в $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$, так и в $\mathfrak{M}_{(\beta)}$; при этом, когда точка M пробегает $\mathfrak{N}$, ее координаты y^i в $\mathfrak{M}_{(\beta)}$ являются N раз непрерывно дифференцируемыми однозначными функциями от ее координат x^i в $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$, равно как и обратно.

4°. Если M_1 и M_2 — две *различные* точки $\mathfrak{M}$, причем $M_1 \in \mathfrak{M}_{(\alpha_1)}$, $M_2 \in \mathfrak{M}_{(\alpha_2)}$ (допускается, в частности, и совпадение $\alpha_1 = \alpha_2$), то в

$\mathfrak{M}_{(\alpha_1)}$ найдется область $\mathfrak{N}_1 \ni M_1$ и в $\mathfrak{M}_{(\alpha_2)}$ — область $\mathfrak{N}_2 \ni M_2$, не пересекающиеся между собой.

5°. Любые два подмножества $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$ и $\mathfrak{M}_{(\beta)}$ можно связать конечной цепочкой последовательно пересекающихся между собой подмножеств $\mathfrak{M}_{(\gamma)}$; точнее, существует конечная последовательность $\mathfrak{M}_{(\gamma_i)}$ ($i = 1, 2, \ldots, s$), причем $\mathfrak{M}_{(\gamma_i)}$ и $\mathfrak{M}_{(\gamma_{i+1})}$ всегда между собой пересекаются и, кроме того, $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$ пересекается с $\mathfrak{M}_{(\gamma_1)}$, а $\mathfrak{M}_{(\beta)}$ — с $\mathfrak{M}_{(\gamma_s)}$.

Смысл этих условий следующий. Условия 1° и 2° означают, что $\mathfrak{M}$ «склеено» из конечного или счетного запаса элементарных многообразий $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$, частью, возможно, не имеющих общих точек, частью налегающих друг на друга или даже заключающих одно другое. Впрочем в последнем случае $\mathfrak{M}_{(\beta)}$, входящее в $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$, является по существу лишним и может быть изъято без ущерба для дела.

Условие 3° требует, чтобы (непустое) пересечение $\mathfrak{N}$ элементарных многообразий $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$ и $\mathfrak{M}_{(\beta)}$ было областью (открытым множеством) и в $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$ и в $\mathfrak{M}_{(\beta)}$. Это значит, что если точка $M \in \mathfrak{M}_{(\alpha)}$ склеена с какой-то точкой $L \in \mathfrak{M}_{(\beta)}$, то и некоторая окрестность точки M в $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$ тоже подклеивается к $\mathfrak{M}_{(\beta)}$, т. е. не может быть так, чтобы $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$ и $\mathfrak{M}_{(\beta)}$ до какого-то места были подклеены друг к другу, а дальше отходили бы одно от другого. Другими словами, склеенное из $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$ многообразие $\mathfrak{M}$ не должно «ветвиться» вследствие неаккуратной, неполной подклейки многообразий $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$ друг к другу.

Далее, условие 3° требует, чтобы в склеенных местах многообразий $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$, $\mathfrak{M}_{(\beta)}$ их дифференцируемая структура была одинаковой, т. е. координаты в одном и в другом многообразии были связаны N раз непрерывно дифференцируемыми преобразованиями. Действительно, если бы этого не было, то мы не знали бы, какую дифференцируемую структуру приписать многообразию $\mathfrak{M}$ в области $\mathfrak{N}$: заимствованную из $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$ или из $\mathfrak{M}_{(\beta)}$? При наличии же нашего условия это становится безразличным. Координатной системой в $\mathfrak{M}$ мы будем называть любую координатную систему в любом $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$.

Если нас интересуют лишь чисто локальные свойства многообразия $\mathfrak{M}$, т. е. его поведение в некоторой окрестности произвольной точки M, то для этого перечисленных требований 1°—3°, в сущности, достаточно. Однако если ограничиться этим, то мы допустим существование многообразий, весьма неприятных в некоторых отношениях. Прежде всего, несмотря на условие 3°, все еще возможно «ветвление» многообразия $\mathfrak{M}$. Рассмотрим простой пример: пусть $n = 1$ и $\mathfrak{M}$ склеивается из двух одномерных элементарных многообразий $\mathfrak{M}_{(1)}$, $\mathfrak{M}_{(2)}$, представляющих собой интервалы $(-1, 1)$ на осях x^1, x^2 соответственно: $\mathfrak{M}_{(1)}\{-1 < x^1 < 1\}$,

$\mathfrak{M}_{(2)}\{-1 < x^2 < 1\}$. Образуем $\mathfrak{M}$, склеивая $\mathfrak{M}_{(1)}$ и $\mathfrak{M}_{(2)}$ следующим образом: точки x^1 при $-1 < x^1 < 0$ отождествляются с точками x^2 при $-1 < x^2 < 0$ по принципу равенства координат $x^1 = x^2$; точки x^1 при $0 \leqslant x^1 < 1$ и точки x^2 при $0 \leqslant x^2 < 1$ не склеиваются ни с чем.

В результате $\mathfrak{M}$ будет состоять из интервала $-1 < x < 0$ (это будет область пересечения $\mathfrak{N}$) и примыкающего к нему *раздвоенного* полуинтервала $0 \leqslant x < 1$, т. е. $\mathfrak{M}$ будет ветвиться.

Между тем условие 3°, как легко проверить, полностью соблюдается: ветвление этого типа оно неспособно устранить, хотя и устраняет ветвление более грубого характера, например, если бы мы составили $\mathfrak{M}$ из полуинтервала $-1 < x \leqslant 0$ и из примыкающего к нему *раздвоенного* интервала $0 < x < 1$ (действительно, в этом случае $\mathfrak{N}\{-1 < x \leqslant 0\}$ не будет областью).

Чтобы устранить не только такие, но и более тонкие случаи ветвления $\mathfrak{M}$, подобные приведенному выше примеру, мы вводим условие 4° (*аксиому Хаусдорфа*). Теперь и первый наш пример становится невозможным, так как условие 4° в нем нарушено для точек $x^1 = 0$ и $x^2 = 0$ (в $\mathfrak{M}$ — это различные точки). Действительно, какими бы интервалами ни окружать эти точки в $\mathfrak{M}_{(1)}$ и $\mathfrak{M}_{(2)}$ соответственно, эти интервалы всегда будут иметь общие точки в склеенной части $-1 < x < 0$.

Наконец, мы не хотим, чтобы многообразие $\mathfrak{M}$ состояло из отдельных, ничем не связанных между собой кусков. Условие 5° (условие связности многообразия) устраняет эту возможность и превращает многообразие в единое целое, не распадающееся на не пересекающиеся между собой многообразия.

Отметим, что в многообразии $\mathfrak{M}$, естественно, определяется понятие области (открытого множества): это множество точек, содержащее вместе с каждой своей точкой $M_0(x_0^i)$ и все точки $M(x^i)$, для которых разности $x^i - x_0^i$ по модулю меньше некоторого $\delta > 0$ (δ зависит от M_0); под x^i понимается какая-либо координатная система в каком-нибудь элементарном многообразии $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$ содержащем M_0. Нетрудно показать, что смысл определения не зависит от того или иного выбора этой координатной системы.

Определенный таким образом класс открытых множеств удовлетворяет аксиомам топологического пространства, специальным случаем которого и является многообразие.

Далее, мы говорим, что переменная точка M стремится к точке M_0 (стремится или по последовательности положений M_k ($k = 1, 2, \ldots$) или как функция $M(t)$ непрерывно растущего (убывающего) параметра $t \to t_0$), если точка M с некоторого момента находится в области действия координатной системы, включающей точку M_0, и координаты x^i точки M стремятся к координатам x_0^i точки M_0

(если сказанное имеет место для одной координатной системы, включающей M_0, то и для любой другой — тоже).

В силу условия 4° наша *переменная точка M не может стремиться одновременно к двум различным точкам M_0, M_0'.*

Мы называем *кривой* «параметризованное» множество точек $M(t)$, где $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, если при достаточно малых изменениях любого данного значения t точка $M(t)$ остается в пределах одной координатной системы, причем ее текущие координаты $x^i(t)$ — N раз непрерывно дифференцируемые функции.

Далее мы говорим, что в $\mathfrak{M}$ задано тензорное поле, например V^i_{jk}, если в $\mathfrak{M}$ в каждой точке M и в каждой координатной системе x^i (действующей в области, содержащей точку M) задана система чисел $V^i_{jk}(M)$, которые $N-1$ раз непрерывно дифференцируемым образом зависят от координат $x^1, \ldots, x^n$ точки M и преобразуются (при преобразовании координатной системы) согласно (81.1).

Аналогично определяется тензорное поле, заданное лишь в некоторой области $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ или на поверхности $\mathfrak{M}_m \subset \mathfrak{M}$.

Наше определение многообразия дает нам все нужное, но страдает тем недостатком, что дает и кое-что лишнее; а именно, в нашем определении способ склеивания многообразия из элементарных многообразий рассматривается наряду с его окончательным результатом — готовым многообразием. Между тем нас интересует лишь последнее, и мы не будем считать два экземпляра одного и того же многообразия различными, если они по-разному разбиты на элементарные многообразия. Например, сферу можно составить, как уже указывалось, склеиванием двух (слегка продолженных за края) полусфер, а можно составить и склеиванием внутренностей нескольких сферических треугольников, заходящих один на другой. Тем не менее сфера в обоих случаях представляет одно и то же многообразие. Поэтому наше определение нужно несколько дополнить. С этой целью дадим определение диффеоморфизма двух многообразий.

Два многообразия $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ одного числа измерений n и одного класса N называются диффеоморфными, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие, обладающее следующим свойством: пусть $M \in \mathfrak{M}$ и $M' \in \mathfrak{M}'$ — любые две отвечающие друг другу точки и пусть M принадлежит некоторому элементарному многообразию $\mathfrak{M}_{(\alpha)} \subset \mathfrak{M}$ с координатной системой x^i, а M' — элементарному многообразию $\mathfrak{M}_{(\alpha')} \subset \mathfrak{M}'$ с координатной системой $x^{i'}$; тогда соответствие между точками многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ можно записать в виде

$$x^{i'} = f_i(x^1, \ldots, x^n), \quad x^i = g_i(x^{1'}, \ldots, x^{n'}),$$

по крайней мере, в пределах некоторой области изменения x^i, заключающей точку M, и соответствующей ей области изменения $x^{i'}$, заключающей точку M', причем функции f_i, g_i N раз непрерывно дифференцируемые.

Под областью изменения x^i здесь подразумевается не обязательно область изменения, которую пробегают x^i, когда M пробегает $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$, а, вообще говоря, некоторая ее подобласть; аналогично и для $x^{i'}$.

Коротко говоря, диффеоморфизм многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ есть взаимно однозначное соответствие, N раз непрерывно дифференцируемое в обе стороны в тех пределах, в каких его удается записать в виде функциональной зависимости между координатами x^i в многообразии $\mathfrak{M}$ и $x^{i'}$ в многообразии $\mathfrak{M}'$, причем это должно удаваться, по крайней мере, вблизи любой пары соответствующих точек M и M'.

Теперь к нашему определению многообразия следует добавить только, что *всякое многообразие будет интересовать нас лишь с точностью до замены диффеоморфным многообразием.* Этим мы отвлекаемся от ненужных по сути дела подробностей, именно от способа составления данного многообразия из элементарных кусков.