ГЛАВА VII

РИМАНОВЫ ПРОСТРАНСТВА И ПРОСТРАНСТВА АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

§ 85. Риманово пространство

Многообразие является той основой, на которой строится риманово пространство — важнейшее понятие этой книги. Пути для этого мы уже наметили в конце § 79. Чтобы превратить многообразие в риманово пространство, нужно внести в него метрику. Это мы осуществляем заданием в многообразии метрического тензора, аналогичного метрическому тензору евклидова пространства в криволинейных координатах. Дадим точное определение.

Римановым пространством V_n мы будем называть многообразие $\mathfrak{M}_n$, в котором задано поле тензора

$$g_{ij}(M) = g_{ij}(x^1, \ldots, x^n), \tag{85.1}$$

два раза ковариантного, симметрического и невырожденного:

$$\operatorname{Det}|g_{ij}| \neq 0, \qquad g_{ij} = g_{ji}. \tag{85.2}$$

В остальном тензор $g_{ij}(M)$ выбирается произвольно; это значит, что на одно и то же многообразие $\mathfrak{M}_n$ можно по-разному накладывать риманову метрику. Тензор $g_{ij}(M)$ мы будем называть *метрическим*; его мы кладем в основу построения римановой геометрии по аналогии с евклидовой геометрией, вполне определяемой своим метрическим тензором (§ 79). В этой главе многообразие $\mathfrak{M}_n$ имеет класс $N \geqslant 2$ и, соответственно, функции (85.1) непрерывно дифференцируемы $N-1$ раз.

Мы начнем с рассмотрения касательного аффинного пространства A_n к нашему многообразию в какой-нибудь точке M. Векторы ξ этого пространства служат геометрическим изображением тензоров ξ^i в данной точке M. Располагая тензорным полем $g_{ij}(M)$, *мы превратим каждое касательное пространство из аффинного A_n в евклидово R_n, вводя в нем скалярное произведение любых двух* *векторов* ξ, η *по формуле*

$$\xi\eta = g_{ij(M)}\xi^i\eta^j. \tag{85.3}$$

В сущности говоря, к этому и сводится геометрическое осмысливание тензора $g_{ij}(M)$; все остальное будет уже отсюда вытекать. Можно было бы даже сказать, что риманово пространство V_n — это многообразие $\mathfrak{M}_n$, в котором в каждое касательное пространство A_n внесена евклидова метрика; нужно было бы лишь обеспечить достаточно гладкое ее изменение от точки к точке (что у нас обеспечивается непрерывной дифференцируемостью функций $g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$).

В силу полного свертывания в правой части (85.3) скалярное произведение $\xi\eta$ представляет собой инвариант. Очевидно, $\xi\eta$ линейно зависит от ξ и от η, обладает симметрией

$$\xi\eta = \eta\xi$$

в силу симметрии тензора g_{ij} и дает невырожденную евклидову метрику в силу условия (85.1). Все это показывается дословно так же, как в § 39.

Мы будем называть риманово пространство *собственно римановым* или *псевдоримановым* в зависимости от того, будут ли его касательные пространства собственно евклидовыми или псевдоевклидовыми (мы рассматриваем только вещественные пространства). Все, сказанное для евклидовых пространств, будет, конечно, само собой справедливо для касательных пространств R_n в каждой точке M риманова пространства V_n. В частности, длина вектора ξ выражается формулой

$$|\xi| = \sqrt{\xi^2} = \sqrt{g_{ij}\xi^i\xi^j}. \tag{85.4}$$

При этом собственно риманово пространство характеризуется тем, что квадратичная форма $g_{ij}\xi^i\xi^j$ будет положительно определенной.

Пусть в какой-нибудь точке M риманова пространства задан тензор, например, $V^{i\cdot\cdot}_{\cdot rs}$. Его можно рассматривать одновременно и как тензор в касательном пространстве R_n относительно локального репера. При этом $g_{ij}(M)$ служит в R_n метрическим тензором. Составим контравариантный метрический тензор $g^{ij}(M)$, координаты которого образуют матрицу, обратную $\|g_{ij}(M)\|$. Как мы знаем, в евклидовом пространстве R_n разница между верхними и нижними индексами является несущественной в том смысле, что верхние индексы можно переводить в нижние и, наоборот, при помощи метрического тензора. Так, например, индекс r у нашего тензора можно «поднять», т. е. составить тензор

$$V^{ir\cdot}_{\cdot\cdot s} = g^{rp}V^{i\cdot\cdot}_{\cdot ps}. \tag{85.5}$$

Обратно, у полученного тензора индекс r можно «опустить», причем мы возвращаемся к прежнему тензору:

$$V^{i..}_{.rs} = g_{rp} V^{ip.}_{..s}. \tag{85.5'}$$

Эти взаимно обратные операции «поднятия» и «опускания» данного индекса можно рассматривать и для тензорных полей $V^{i..}_{.rs}(M)$, $V^{ir.}_{..s}(M)$, подразумевая, что формулы (85.5), (85.5') имеют место в каждой точке рассматриваемой области.

Рассмотрим теперь в римановом пространстве кривую

$$x^i = x^i(t), \qquad a \leqslant t \leqslant b. \tag{85.6}$$

Бесконечно малому смещению по этой кривой отвечает бесконечно малый вектор $dx^i(t)$ в касательном пространстве (§ 82). Но теперь мы можем измерить длину этого вектора, чего раньше (в многообразии) нельзя было сделать. Получим:

$$|d\mathbf{x}| = \sqrt{d\mathbf{x}^2} = \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j}.$$

По аналогии с евклидовым пространством *мы принимаем длину вектора* $d\mathbf{x}$ *за дифференциал дуги* ds *вдоль нашей кривой, так что*

$$ds^2 = d\mathbf{x}^2 = g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)\, dx^i dx^j. \tag{85.7}$$

Здесь $x^1, \ldots, x^n$ — координаты той точки M, из которой производится бесконечно малое смещение по кривой. Таким образом, квадрат дифференциала дуги выражается *дифференциальной квадратичной формой* от координат x^i. При преобразовании координат x^i эта квадратичная форма инвариантна, так как представляет собой скалярный квадрат вектора dx^i, или, что то же, результат полного свертывания тензора g_{ij} с дважды взятым тензором dx^i. Квадратичную форму $g_{ij}dx^i dx^j$ мы будем называть *метрической*.

В определении риманова пространства можно заменить задание тензорного поля $g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$ заданием метрической квадратичной формы (или, как говорят еще, линейного элемента риманова пространства). Тогда определение будет звучать так:

Римановым пространством V_n *называется многообразие* $\mathfrak{M}_n$, *в котором задана инвариантная дифференциальная квадратичная форма*

$$g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)\, dx^i dx^j, \tag{85.8}$$

где g_{ij} $N-1$ *раз непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют условию*

$$\operatorname{Det}|g_{ij}| \neq 0 \qquad (g_{ij} = g_{ji}). \tag{85.9}$$

Из инвариантности квадратичной формы будет следовать, что g_{ij} образуют тензорное поле, так что мы возвращаемся к прежнему определению. В самом деле, запишем инвариантность формы (85.8) при переходе к новым координатам $x^{i'}$:

$$g_{i'j'}dx^{i'}\,dx^{j'}=g_{ij}\,dx^i\,dx^j.$$

Подставляя в правую часть

$$dx^i=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\,dx^{i'},$$
$$dx^j=\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\,dx^{j'},$$

получаем тождественное равенство двух квадратичных форм относительно переменных $dx^{1'}, \ldots, dx^{n'}$:

$$g_{i'j'}dx^{i'}\,dx^{j'}=g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\,dx^{i'}\,dx^{j'}.$$

Отсюда, учитывая, что $g_{ij}=g_{ji}$, $g_{i'j'}=g_{j'i'}$, получим:

$$g_{i'j'}=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\,g_{ij},$$

т. е. тензорный закон преобразования для g_{ij}. Мы вернулись к первому определению.

За *длину кривой* (85.6) мы принимаем интеграл от дифференциала дуги

$$s=\int_a^b\sqrt{g_{ij}dx^i\,dx^j}=$$
$$=\int_a^b\sqrt{g_{ij}\left(x^1(t),\ \ldots,\ x^n(t)\right)\frac{dx^i(t)}{dt}\,\frac{dx^j(t)}{dt}}\,dt. \quad (85.10)$$

В последнем выражении мы выносим dt из-под знака радикала и везде явно выписываем окончательный аргумент t, чтобы строение подынтегральной функции было видно полностью. Инвариантный характер интеграла относительно преобразования координат x^i ясен из инвариантности квадратичной формы под знаком радикала (полное свертывание); инвариантность относительно преобразования параметра t вдоль кривой проверяется очевидным образом.

Собственно риманово пространство характеризуется тем, что в нем метрическая квадратичная форма будет положительно определенной, а ds — всегда вещественным. Напротив, в псевдоримановом пространстве ds может быть вещественным, чисто мнимым и нулем. При этом радикал в (85.10) мы условимся брать положительным или с положительным коэффициентом при i. Кривые у нас будут, следовательно, трех сортов: вещественной длины, мнимой длины и изотропные.

Рассмотрим теперь в римановом пространстве V_n поверхность $\mathfrak{M}_m$

$$x^i = x^i(u^1, \ldots, u^m),$$

сохраняя все обозначения и предположения § 83.

Вычислим дифференциал дуги при произвольном бесконечно малом смещении при произвольной кривой на $\mathfrak{M}_m$. Пользуясь снова формулой (85.7) и учитывая, что теперь

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} du^\alpha \tag{85.11}$$

$\left(\text{и аналогично } dx^j = \frac{\partial x^j}{\partial x^\beta} du^\beta\right)$, получаем:

$$ds^2 = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} du^\alpha du^\beta.$$

Обозначим:

$$G_{\alpha\beta} = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}. \tag{85.12}$$

Очевидно, $G_{\alpha\beta}$ представляет собой скалярные произведения векторов $\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$, $\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}$, касательных к координатным линиям u^α, u^β.

Учитывая, что $G_{\alpha\beta}$ зависят от точки на $\mathfrak{M}_m$, т. е. от $u^1, \ldots, u^m$, записываем окончательно:

$$ds^2 = G_{\alpha\beta}(u^1, \ldots, u^m)\, du^\alpha du^\beta. \tag{85.13}$$

Итак, на поверхности $\mathfrak{M}_m$ возникает дифференциальная квадратичная форма от переменных $u^1, \ldots, u^m$, выражающая квадрат дифференциала дуги и, следовательно, инвариантная (линейный элемент поверхности $\mathfrak{M}_m$). Используя второе определение риманова пространства, мы вправе утверждать, что поверхность $\mathfrak{M}_m$ представляет собой m-мерное риманово пространство V_m с метрическим тензором $G_{\alpha\beta}$, *если только соблюдается условие*

$$\operatorname{Det} | G_{\alpha\beta} | \neq 0. \tag{85.14}$$

Что касается условия $G_{\alpha\beta} = G_{\beta\alpha}$, то оно очевидным образом следует из формулы (85.12) и условия $g_{ij} = g_{ji}$.

Условие (85.14) не обязано соблюдаться само собой, хотя, грубо говоря, большей частью оно соблюдается. Здесь положение такое же, как с плоскостями в евклидовом пространстве: большей частью они бывают неизотропными и несут на себе евклидову метрику, но могут быть и изотропными — с вырожденной метрикой.

Если условие (85.14) соблюдается, то поверхность мы будем называть *неизотропной*; она несет на себе риманову метрику, и в дальнейшем мы обозначаем ее V_m, т. е. как m-мерное риманово пространство. Обозначение V_m мы будем употреблять только в случае неизотропной поверхности.

Если же условие (85.14) не соблюдается,

$$\operatorname{Det} | G_{\alpha\beta} | = 0, \tag{85.15}$$

то поверхность мы называем *изотропной* и сохраняем для нее обозначение $\mathfrak{M}_m$. Квадратичная форма (85.13) имеет на ней неполный ранг, и метрика вырождается. Как правило, изотропными поверхностями мы интересоваться не будем. В случае *собственно риманова* пространства все поверхности неизотропные, так как условие (85.14) вытекает из положительной определенности формы $ds^2 = G_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$. Правда, непосредственно нам дана положительная определенность лишь для формы $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$. Но если принять, что не все du^α равны нулю, то из условия (83.2) следует, что соответствующие $dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} du^\alpha$ тоже не могут быть все равны нулю, а следовательно,

$$G_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta \, (= g_{ij} dx^i dx^j) > 0.$$

Рассмотрим теперь *касательную плоскость* A_m к поверхности $\mathfrak{M}_m$. Эта плоскость лежит в касательном пространстве A_n, которое сейчас у нас является евклидовым, причем ее векторы ξ^i в силу (83.11) имеют вид

$$\xi^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \xi^\alpha, \tag{85.16}$$

где ξ^α — всевозможные тензоры в $\mathfrak{M}_m$ в данной точке M.

Скалярное произведение любых двух векторов ξ, η плоскости A_m мы получаем, вставляя в (85.3) выражения для ξ^i, η^j согласно (85.16):

$$\xi^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \xi^\alpha, \qquad \eta^j = \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} \eta^\beta.$$

В результате

$$\xi\eta = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} \xi^\alpha \eta^\beta = G_{\alpha\beta}(M) \, \xi^\alpha \eta^\beta. \tag{85.17}$$

Пусть соблюдается условие (85.14). Плоскость A_m будет неизотропной и несет евклидову метрику. Для многообразия $\mathfrak{M}_m$ и тем самым для риманова пространства V_m плоскость A_m служит касательным пространством, так как все тензоры ξ^α находят себе изображение в виде ее векторов согласно (85.16). Формула (85.17) для V_m повторяет формулу (85.3) для V_n. Метрическим тензором служит теперь $G_{\alpha\beta}$.

Мы будем называть *нормальной плоскостью* к поверхности V_m в данной точке M $n-m$-мерную плоскость B_{n-m} в касательном к V_n евклидовом пространстве A_n, ортогональную к касательной плоскости A_m и проходящую через M. В случае гиперповерхности V_{n-1} нормальная плоскость B_1 будет одномерной, т. е. представляет собой просто прямую (нормаль).

В трехмерном римановом пространстве V_3 (в частности, в обычном евклидовом пространстве) можно рассматривать одномерные поверхности V_1, т. е. кривые и двумерные поверхности V_2. В согласии с элементарной дифференциальной геометрией в случае V_1 нормальная плоскость имеет $n-m=2$ измерения, а в случае V_2 она представляет собой просто нормаль к поверхности ($n-m=1$).

§ 86. Евклидово пространство R_n как частный случай риманова

Мы видели в § 79, что евклидово пространство (вообще говоря, рассматриваемое в пределах некоторой области Ω) обладает, как и риманово, полем метрического тензора $g_{ij}(M)$, причем этот тензор определяет всю его геометрию. Следовательно, мы можем рассматривать евклидово пространство как частный случай риманова. В чем же выражается особенность этого частного случая?

В евклидовом пространстве всегда можно перейти в такую специальную координатную систему, именно, в любую аффинную, в которой координаты метрического тензора становятся константами:

$$g_{ij}(M)=\mathrm{const}.$$

Между тем в произвольном римановом пространстве этого, вообще говоря, сделать нельзя. Как бы мы ни подбирали новую координатную систему $x^{i'}$, нам не удастся добиться, чтобы в ней координаты метрического тензора

$$g_{i'j'}=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}g_{ij}$$

оказались бы константами. Таким образом, в римановом пространстве не существует, вообще говоря, специальных «прямолинейных» координатных систем наподобие аффинных. Поэтому мы здесь говорим просто о координатных системах без прилагательного «криволинейные»: они все по необходимости являются криволинейными в силу «кривого» характера самой метрики.