для риманова пространства V_m плоскость A_m служит касательным пространством, так как все тензоры ξ^α находят себе изображение в виде ее векторов согласно (85.16). Формула (85.17) для V_m повторяет формулу (85.3) для V_n. Метрическим тензором служит теперь $G_{\alpha\beta}$.

Мы будем называть *нормальной плоскостью* к поверхности V_m в данной точке M $n-m$-мерную плоскость B_{n-m} в касательном к V_n евклидовом пространстве A_n, ортогональную к касательной плоскости A_m и проходящую через M. В случае гиперповерхности V_{n-1} нормальная плоскость B_1 будет одномерной, т. е. представляет собой просто прямую (нормаль).

В трехмерном римановом пространстве V_3 (в частности, в обычном евклидовом пространстве) можно рассматривать одномерные поверхности V_1, т. е. кривые и двумерные поверхности V_2. В согласии с элементарной дифференциальной геометрией в случае V_1 нормальная плоскость имеет $n-m=2$ измерения, а в случае V_2 она представляет собой просто нормаль к поверхности $(n-m=1)$.

§ 86. Евклидово пространство R_n как частный случай риманова

Мы видели в § 79, что евклидово пространство (вообще говоря, рассматриваемое в пределах некоторой области Ω) обладает, как и риманово, полем метрического тензора $g_{ij}(M)$, причем этот тензор определяет всю его геометрию. Следовательно, мы можем рассматривать евклидово пространство как частный случай риманова. В чем же выражается особенность этого частного случая?

В евклидовом пространстве всегда можно перейти в такую специальную координатную систему, именно, в любую аффинную, в которой координаты метрического тензора становятся константами:

$$g_{ij}(M) = \text{const}.$$

Между тем в произвольном римановом пространстве этого, вообще говоря, сделать нельзя. Как бы мы ни подбирали новую координатную систему $x^{i'}$, нам не удастся добиться, чтобы в ней координаты метрического тензора

$$g_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} g_{ij}$$

оказались бы константами. Таким образом, в римановом пространстве не существует, вообще говоря, специальных «прямолинейных» координатных систем наподобие аффинных. Поэтому мы здесь говорим просто о координатных системах без прилагательного «криволинейные»: они все по необходимости являются криволинейными в силу «кривого» характера самой метрики.

Возникает вопрос, как узнать фактически, возможен ли в данном римановом пространстве V_n переход к таким координатам x^i с некоторой областью изменения Ω, в которых

$$g_{ij}(M) = \text{const},$$

т. е. можно ли отождествить V_n с некоторой областью Ω в евклидовом пространстве, заданном в аффинных координатах. Но на этот вопрос мы сможем ответить лишь в главе VIII.

Если в римановом пространстве V_n в целом мы, возможно, не в состоянии подобрать таких координат x^i, чтобы в них $g_{ij}(M)$ были константами, *но можем сделать это по отдельности в некоторой окрестности каждой его точки, то пространство V_n называется локально евклидовым.* Так, например, если отождествить в квадрате точки каждой стороны с соответствующими точками противоположной стороны, то квадрат «склеится» в двумерное многообразие, устроенное наподобие тора. При этом все четыре вершины склеятся в одну точку, в которой сойдутся все четыре угла квадрата. Если сохранить в этом многообразии прежнюю метрику, то мы получаем пример локально евклидова пространства двух измерений (разумеется, это пространство приходится рассматривать абстрактно, не пытаясь реализовать его в виде тора в обычном пространстве: в последнем случае метрика не может быть локально евклидовой). Здесь мы имеем дело с неэлементарным многообразием; но и элементарное многообразие может нести на себе локально евклидову метрику, не будучи областью евклидова пространства. Так, последовательно подклеивая друг к другу листы бумаги, нетрудно сделать так, что последний лист будет заходить на первый (причем мы их оставим несклеенными). Мы получим локально евклидово двумерное многообразие, не являющееся в то же время областью евклидовой плоскости.

В евклидовом пространстве нет надобности в каждой точке M строить касательное пространство, как мы делали в римановом пространстве общего вида. Действительно, каждый контравариантный тензор ξ^i в евклидовом пространстве, заданный в криволинейных координатах в какой-нибудь точке M, изображается вполне определенным вектором

$$\boldsymbol{\xi} = \xi^i \mathbf{x}_i$$

в этом же пространстве (см. (76.13)). Поэтому евклидово пространство служит, как мы будем считать, само к себе касательным в любой точке M. Отдельных от него касательных пространств рассматривать не будем.

Мы выяснили, что поверхность V_m в римановом пространстве V_n сама является римановым пространством.

В частности, *в качестве вмещающего пространства V_n можно взять евклидово пространство R_n.*

Простейший пример такого рода доставляет теория поверхностей в обычном евклидовом пространстве R_3. На поверхности, отнесенной к параметрам u, v, появляется первая основная квадратичная форма, выражающая квадрат дифференциала дуги

$$ds^2 = E(u,v)\,du^2 + 2F(u,v)\,du\,dv + G(u,v)\,dv^2. \qquad (86.1)$$

Тем самым поверхность можно считать двумерным римановым пространством с метрической квадратичной формой (86.1) и соответственно с метрическим тензором

$$g_{11} = E, \qquad g_{12} = g_{21} = F, \qquad g_{22} = G. \qquad (86.2)$$

Риманова геометрия, порождаемая на поверхности метрической квадратичной формой (86.1), носит название *внутренней геометрии* поверхности; она инвариантна при изгибании поверхности.

Аналогичным образом и в многомерных евклидовых (в том числе и псевдоевклидовых) пространствах R_n мы можем рассматривать любые поверхности V_m, получая на них каждый раз определенную риманову геометрию (при условии (85.14)).

По сравнению с изучением поверхностей V_m в произвольном римановом пространстве V_n мы получаем здесь ряд преимуществ. Прежде всего будем считать, что уравнения поверхности V_m

$$x^i = x^i(u^1, \ldots, u^m) \qquad (86.3)$$

записаны в аффинных координатах x^i. Тогда можно перейти к параметрическому уравнению поверхности в векторной форме, выразив радиус-вектор $\mathbf{x}$ произвольной точки поверхности как функцию параметров:

$$\mathbf{x} = x^i(u^1, \ldots, u^m)\,\mathbf{e}_i, \text{ или, коротко, } \mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, \ldots, u^m). \qquad (86.4)$$

Касательный вектор к произвольной кривой

$$u^\alpha = u^\alpha(t) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m) \qquad (86.5)$$

на нашей поверхности мы находим, дифференцируя радиус-вектор $\mathbf{x}$ по t:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\alpha}\frac{du^\alpha}{dt}.$$

Проводя через данную точку M всевозможные кривые по поверхности, мы получаем в качестве $\frac{du^\alpha}{dt}$ всевозможные тензоры ξ^α на V_m, а в качестве $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ — всевозможные векторы $\boldsymbol{\xi}$, касательные к V_m

в данной точке. Итак,

$$\xi = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\alpha} \xi^\alpha. \tag{86.6}$$

В результате касательные векторы $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$, откладываемые от точки M, заполняют m-мерную плоскость A_m, построенную на векторах

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^m}, \tag{86.7}$$

касательных к координатным линиям. Линейная независимость этих векторов видна из условия (83.2). В отличие от риманова пространства все рассматриваемые векторы и плоскость A_m (касательная плоскость) принадлежат тому же евклидову пространству, в котором расположена поверхность (а не специально построенному в каждой точке M касательному пространству A_n). Этому же евклидову пространству принадлежит и нормальная плоскость B_{n-m}, ортогональная к касательной плоскости A_m. В частности, для гиперсферы S_{n-1} с центром в начале O радиус-вектор $\mathbf{x}$ удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{x}^2 = \text{const}.$$

Дифференцируя $\mathbf{x}^2$ вдоль любой кривой на гиперсфере, получим:

$$2\mathbf{x}\frac{d\mathbf{x}}{dt} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} \perp \mathbf{x}.$$

Таким образом, все касательные к гиперсфере S_{n-1} векторы в данной точке (а значит, и касательная гиперплоскость A_{n-1}) ортогональны к радиусу-вектору данной точки.

Наконец, линейный элемент на поверхности V_m можно найти, применяя формулу (65.10):

$$ds^2 = d\mathbf{x}^2$$

к произвольной кривой на поверхности V_m. Так как

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\alpha} du^\alpha,$$

то

$$ds^2 = d\mathbf{x}^2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\alpha} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\beta} du^\alpha du^\beta. \tag{86.8}$$

Сравнивая с (85.13), получаем:

$$G_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\alpha} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\beta}. \tag{86.9}$$

Мы получили выражение координат метрического тензора в римановом пространстве V_m (предполагаем, что $\operatorname{Det}|G_{\alpha\beta}| \neq 0$). Возникает вопрос, любое ли наперед заданное риманово пространство V_m можно реализовать таким образом на некоторой поверхности в R_n. Можно было бы доказать (хотя и совсем не простым образом), что ответ будет утвердительным, если вмещающее евклидово пространство R_n взять достаточно большего числа измерений, а именно:

$$n=\frac{m(m+1)}{2}. \tag{86.10}$$

Разумеется, иногда V_m можно реализовать и в евклидовом пространстве меньшего числа измерений, но чтобы провести реализацию во всех случаях, нужно взять указанное значение n. При этом наше утверждение носит локальный характер, т. е. мы можем гарантировать реализацию V_m в виде поверхности в R_n, беря V_m не в целом, а лишь в некоторой окрестности любой его точки. Кроме того, функции $g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$ предполагаются аналитическими, и уравнения поверхности получаются тоже аналитическими. Если же V_m псевдориманово пространство, то R_n должно быть псевдоевклидовым и притом подходящего индекса.

Интересно отметить, что в случае $m=2$ формула (86.10) дает $n=3$, т. е. любое двумерное риманово пространство локально реализуется на некоторой поверхности в трехмерном евклидовом пространстве.

В 1956 г. Нэш показал, что собственно риманово V_m *в целом* может быть реализовано в собственно евклидовом R_n при достаточно большом n.

§ 87. Неевклидовы пространства

Мы хотим сейчас рассмотреть важный частный случай поверхности V_m в R_n, именно, когда эта поверхность является гиперсферой S_{n-1}. *Гиперсферой* S_{n-1} мы называем множество всевозможных точек в R_n, находящихся на постоянном расстоянии (вещественном, чисто мнимом или нулевом) от фиксированной точки. Римановы геометрии, возникающие на гиперсферах S_{n-1} в R_n, обладают рядом замечательных свойств; эти геометрии мы будем называть *неевклидовыми*, а гиперсферы S_{n-1}, рассматриваемые как римановы пространства,— *неевклидовыми пространствами*. Чтобы оценить важность неевклидовых геометрий, достаточно принять во внимание, что *геометрия Лобачевского* принадлежит к их числу (хотя и была получена самим Лобачевским совершенно иным путем). Заметим, что приходится говорить о неевклидовых пространствах во множественном числе, потому что даже при данном числе измерений n евклидовы пространства R_n могут обладать различными индексами $k=0, 1, 2, \ldots, n$, в связи с чем гиперсферы S_{n-1} будут представ-