вопрос, любое ли наперед заданное риманово пространство V_m можно реализовать таким образом на некоторой поверхности в R_n. Можно было бы доказать (хотя и совсем не простым образом), что ответ будет утвердительным, если вмещающее евклидово пространство R_n взять достаточно большего числа измерений, а именно:

$$n = \frac{m(m+1)}{2}. \tag{86.10}$$

Разумеется, иногда V_m можно реализовать и в евклидовом пространстве меньшего числа измерений, но чтобы провести реализацию во всех случаях, нужно взять указанное значение n. При этом наше утверждение носит локальный характер, т. е. мы можем гарантировать реализацию V_m в виде поверхности в R_n, беря V_m не в целом, а лишь в некоторой окрестности любой его точки. Кроме того, функции $g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$ предполагаются аналитическими, и уравнения поверхности получаются тоже аналитическими. Если же V_m псевдориманово пространство, то R_n должно быть псевдоевклидовым и притом подходящего индекса.

Интересно отметить, что в случае $m=2$ формула (86.10) дает $n=3$, т. е. любое двумерное риманово пространство локально реализуется на некоторой поверхности в трехмерном евклидовом пространстве.

В 1956 г. Нэш показал, что собственно риманово V_m *в целом* может быть реализовано в собственно евклидовом R_n при достаточно большом n.

§ 87. Неевклидовы пространства

Мы хотим сейчас рассмотреть важный частный случай поверхности V_m в R_n, именно, когда эта поверхность является гиперсферой S_{n-1}. *Гиперсферой* S_{n-1} мы называем множество всевозможных точек в R_n, находящихся на постоянном расстоянии (вещественном, чисто мнимом или нулевом) от фиксированной точки. Римановы геометрии, возникающие на гиперсферах S_{n-1} в R_n, обладают рядом замечательных свойств; эти геометрии мы будем называть *неевклидовыми*, а гиперсферы S_{n-1}, рассматриваемые как римановы пространства, — *неевклидовыми пространствами*. Чтобы оценить важность неевклидовых геометрий, достаточно принять во внимание, что *геометрия Лобачевского* принадлежит к их числу (хотя и была получена самим Лобачевским совершенно иным путем). Заметим, что приходится говорить о неевклидовых пространствах во множественном числе, потому что даже при данном числе измерений n евклидовы пространства R_n могут обладать различными индексами $k=0, 1, 2, \ldots, n$, в связи с чем гиперсферы S_{n-1} будут представлять собой существенно различные римановы пространства. Вещественное или чисто мнимое значение радиуса гиперсферы тоже играет роль. Нулевого же значения мы не допускаем, так как S_{n-1} в этом случае будет изотропной поверхностью, именно *изотропным гиперконусом*, или даже просто сводится к точке (для собственно евклидовых пространств при $k=0$ или n).

Пусть в евклидовом пространстве R_n индекса k, отнесенном к ортонормированному реперу, рассматривается гиперсфера S_{n-1} вещественного радиуса ρ с центром в начале O. Ее уравнение будет:

$$-x^{1^2}-\ldots-x^{k^2}+x^{k+1^2}+\ldots+x^{n^2}=\rho^2, \qquad (87.1)$$

если считать, что скалярный квадрат вектора $\mathbf{x}$ имеет вид

$$\mathbf{x}^2=-x^{1^2}-\ldots-x^{k^2}+x^{k+1^2}+\ldots+x^{n^2}. \qquad (87.2)$$

Заметим, что то же уравнение (87.1) можно переписать в виде

$$x^{1^2}+\ldots+x^{k^2}-x^{k+1^2}-\ldots-x^{n^2}=-\rho^2 \qquad (87.3)$$

и истолковать как уравнение гиперсферы S_{n-1} мнимого радиуса ρi в евклидовом пространстве R_n индекса $n-k$, в котором

$$\mathbf{x}^2=x^{1^2}+\ldots+x^{k^2}-x^{k+1^2}-\ldots-x^{n^2}. \qquad (87.4)$$

Так как при этом изменился знак метрической квадратичной формы в R_n, то то же самое произойдет и на S_{n-1}, вследствие чего риманова метрика на S_{n-1} испытает тривиальное преобразование: все длины умножатся на i.

Итак, гиперсфера радиуса ρ в R_n данного индекса k несет на себе такую же риманову метрику, как и гиперсфера радиуса ρi в R_n дополнительного индекса $n-k$, если не считать умножения всех длин на i.

Вычислим теперь фактически метрическую квадратичную форму на гиперсфере S_{n-1} вещественного радиуса $\rho>0$. При этом случай $k=n$ исключаем, так как тогда гиперсфера вещественного радиуса ρ невозможна (как видно из уравнения (87.1)). Это позволяет нам считать, что в метрической квадратичной форме (87.2) x^{n^2} входит всегда с плюсом.

Мы должны прежде всего ввести какую-либо координатную систему на S_{n-1}. Один из удобнейших способов для этого дает *стереографическая проекция* гиперсферы S_{n-1} на гиперплоскость R_{n-1}; особенностью стереографической проекции является то, что *центр проектирования P выбирается на самой S_{n-1}, а плоскость проекций R_{n-1} проходит ортогонально к радиусу OP* (т. е. параллельно касательной гиперплоскости к S_{n-1} в точке P). Разумеется, R_{n-1} не проходит через P.

Всем этим условиям можно удовлетворить, взяв в качестве центра проектирования точку $P(0, 0, \ldots, 0, \rho)$, а в качестве плоскости проекций R_{n-1} — координатную плоскость $x^n = 0$.

Допустим, что, проектируя точку $M(x^1, \ldots, x^n)$ гиперсферы из P на R_{n-1}, мы попадаем в некоторую точку $L(u^1, \ldots, u^{n-1}, 0)$ плоскости R_{n-1}, где через $u^1, \ldots, u^{n-1}$ обозначены $x^1, \ldots, x^{n-1}$ в точке L.

На рис. 17 изображен случай $n = 3$, причем уравнение S_2 имеет вид

$$\mathbf{x}^2 = -{x^1}^2 + {x^2}^2 + {x^3}^2 = \rho^2,$$

точка P имеет координаты $(0, 0, \rho)$, а u^1, u^2 совпадают с координатами x^1, x^2 точки L на координатной плоскости R_2.

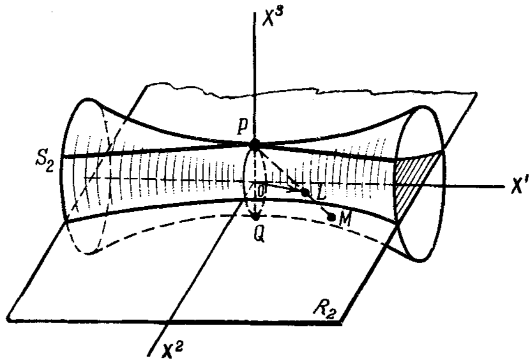

Рис. 17.

В случае обычного пространства $n = 3$, $k = 0$, и мы получаем обычную стереографическую проекцию.

Примем $u^1, \ldots, u^{n-1}$ за параметры на S_{n-1} и выразим $x^1, \ldots, x^n$ через них; это даст нам параметрические уравнения гиперсферы S_{n-1}. Точку M мы будем брать на S_{n-1} где угодно, однако при условии

$$x^n \neq \rho. \tag{87.5}$$

В самом деле, при $x^n = \rho$ мы берем точку M на пересечении S_{n-1} с гиперплоскостью R'_{n-1} $(x^n = \rho)$, параллельной R_{n-1} и проходящей через P. Тогда проектирующий луч PM тоже параллелен R_{n-1} и проекции L не существует. Заметим, что плоскость R'_{n-1} имеет направляющими векторами орты $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}$, тем самым ортогональна к радиусу-вектору $\overrightarrow{OP}$, идущему по оси X^n, и, следовательно, служит *касательной гиперплоскостью к гиперсфере* S_{n-1} в точке P.

Пересечение R'_{n-1} и S_{n-1} определяется уравнением гиперплоскости $x^n = \rho$ и уравнением гиперсферы (87.1); это последнее можно переписать, пользуясь $x^n = \rho$, в виде

$$-(x^1)^2 - \ldots - (x^k)^2 + (x^{k+1})^2 + \ldots + (x^{n-1})^2 = 0. \tag{87.6}$$

Отсюда видно, что в гиперплоскости R'_n мы получаем изотропный конус с вершиной в P. В самом деле, $x^1, \ldots, x^{n-1}$ при $x^n = \rho$

играют роль ортонормированных координат на R'_n с началом в P, причем левая часть уравнения служит метрической квадратичной формой. В случае собственно евклидовой геометрии на плоскости R_{n-1} (и тем самым и на R'_{n-1}) изотропный конус вырождается в точку P, которая, таким образом, лишь одна не имеет проекции на R_{n-1} (как это и имеет место в обычной стереографической проекции). На рис. 17 изотропный конус в R'_2 представлен парой прямолинейных образующих поверхности S_2, проходящих через P. Так как за точку P можно принять любую точку гиперсферы S_{n-1} (если пустить через эту точку ось X^n), то отметим полученный нами попутно общий результат: *гиперсфера S_{n-1} пересекается со своей касательной плоскостью R'_{n-1} по ее изотропному конусу с вершиной в точке касания.*

Теперь переходим к выкладке, предполагая, что в точке M $x^n \neq \rho$. Так как точки P, M, L расположены на одной прямой, то векторы $\overrightarrow{PM}$ и $\overrightarrow{PL}$ должны быть коллинеарны. Записывая пропорциональность координат этих векторов, получаем:

$$\frac{x^\alpha}{u^\alpha} = \frac{x^n - \rho}{-\rho},$$

где $\alpha = 1, 2, \ldots, n-1$. Отсюда

$$x^\alpha = u^\alpha \left(1 - \frac{x^n}{\rho}\right). \tag{87.7}$$

Вставляя в уравнение гиперсферы (87.1), имеем:

$$\left(1 - \frac{x^n}{\rho}\right)^2 [-u^{1^2} - \ldots - u^{k^2} + u^{k+1^2} + \ldots + u^{n-1^2}] + x^{n^2} = \rho^2.$$

Перенеся x^{n^2} в правую часть, получаем выражение

$$\rho^2 - x^{n^2} = \rho^2 \left(1 - \frac{x^n}{\rho}\right)\left(1 + \frac{x^n}{\rho}\right).$$

Так как $x^n \neq \rho$ и, значит, $1 - \frac{x^n}{\rho} \neq 0$, то, сокращая на $1 - \frac{x^n}{\rho}$, получим:

$$\left(1 - \frac{x^n}{\rho}\right) [-u^{1^2} - \ldots - u^{k^2} + u^{k+1^2} + \ldots + u^{n-1^2}] = \\ = \rho^2 \left(1 + \frac{x^n}{\rho}\right). \tag{87.8}$$

Обозначим через $\mathbf{u}$ радиус-вектор OL точки L; он вместе с L имеет координаты $u^1, \ldots, u^{n-1}, 0$ и, как видно из (87.2), его скалярный квадрат можно записать в виде

$$\mathbf{u}^2 = -u^{1^2} - \ldots - u^{k^2} + u^{k+1^2} + \ldots + u^{n-1^2}. \tag{87.9}$$

Вставляя в (87.8) $\mathbf{u}^2$ вместо прямой скобки и разрешая это уравнение относительно x^n, приходим к выражению

$$x^n = \rho\frac{\mathbf{u}^2-\rho^2}{\mathbf{u}^2+\rho^2} = \rho\left(1-\frac{2\rho^2}{\mathbf{u}^2+\rho^2}\right). \tag{87.10}$$

Вставляя это значение x^n в (87.7), придадим последнему следующий вид:

$$x^\alpha = \frac{2\rho^2}{\mathbf{u}^2+\rho^2}u^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{87.11}$$

Мы получили параметрические уравнения (87.10), (87.11) гиперсферы S_{n-1} с параметрами $u^1, \ldots, u^{n-1}$. В то же время это есть выражение координат x^i точки M на гиперсфере S_{n-1} через координаты u^α ее стереографической проекции L на гиперплоскости R_{n-1}.

В случае *собственно евклидовой геометрии на* R_{n-1} имеем $\mathbf{u}^2 \geqslant 0$, и знаменатели в наших уравнениях всегда положительны, *параметрам* u^α *можно давать любые значения*, так что их область изменения состоит из всей гиперплоскости R_{n-1}, причем на S_{n-1} мы получаем, как уже указывалось, тоже *все точки за исключением центра проекций* P.

Хуже обстоит дело в случае псевдоевклидовой геометрии на R_{n-1}; тогда выбор значений u^α нужно ограничить условием

$$\mathbf{u}^2+\rho^2 \neq 0,$$

где $\mathbf{u}^2$ имеет значение (87.9). Поэтому область изменения состоит из гиперплоскости R_{n-1} с выкинутой из нее поверхностью (сферой радиуса ρi) $\mathbf{u}^2+\rho^2=0$. Точки этой области изменения (которая будет несвязной) взаимно однозначно отвечают точкам гиперсферы S_{n-1} с выкинутым из нее изотропным конусом с вершиной в P. Точки этого конуса в нашем параметрическом представлении получаться не будут. Это связано с тем, что S_{n-1} не является элементарным многообразием и *одной* координатной системой не может быть обслужена. Но двух уже будет достаточно (то же построение с центром проекций $Q\,(0, \ldots, 0, -\rho)$ дает вторую координатную систему).

Запишем наше параметрическое представление в векторной форме, обозначая через $\mathbf{x}$ радиус-вектор точки M, а через $\mathbf{u}$ — по-прежнему радиус-вектор точки L. Греческие индексы пробегают значения $1, 2, \ldots, n-1$. Тогда

$$\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i = x^\alpha\mathbf{e}_\alpha + x^n\mathbf{e}_n = \frac{2\rho^2}{\mathbf{u}^2+\rho^2}u^\alpha\mathbf{e}_\alpha + \rho\left(1-\frac{2\rho^2}{\mathbf{u}^2+\rho^2}\right)\mathbf{e}_n.$$

Так как

$$u^\alpha\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{u},$$

то окончательно

$$\mathbf{x} = \frac{2\rho^2}{\mathbf{u}^2+\rho^2}\mathbf{u} + \rho\left(1-\frac{2\rho^2}{\mathbf{u}^2+\rho^2}\right)\mathbf{e}_n. \tag{87.12}$$

Вычислим теперь квадрат дифференциала дуги ds^2 для произвольной кривой на S_{n-1}, пользуясь формулой

$$ds^2 = d\mathbf{x}^2 \tag{87.13}$$

(см. (65.10)). Для этого вычислим сначала

$$d\mathbf{x} = \frac{2\rho^2}{\mathbf{u}^2+\rho^2}\,d\mathbf{u} - \frac{2\rho^2\cdot 2\mathbf{u}\,d\mathbf{u}}{(\mathbf{u}^2+\rho^2)^2}\,\mathbf{u} + \rho\,\frac{2\rho^2\cdot 2\mathbf{u}\,d\mathbf{u}}{(\mathbf{u}^2+\rho^2)^2}\,\mathbf{e}_n.$$

Возводим в скалярный квадрат, выписывая сначала квадраты слагаемых, а потом их удвоенные произведения, и помня при этом, что $\mathbf{e}_n \perp R_{n-1}$, так что $\mathbf{e}_n\mathbf{u} = 0$, $\mathbf{e}_n d\mathbf{u} = 0$, и из трех удвоенных произведений два пропадут; кроме того, $\mathbf{e}_n^2 = 1$. Получим:

$$ds^2 = d\mathbf{x}^2 = \frac{4\rho^4}{(\mathbf{u}^2+\rho^2)^2}\,d\mathbf{u}^2 + \frac{16\rho^4\,(\mathbf{u}\,d\mathbf{u})^2}{(\mathbf{u}^2+\rho^2)^4}\,\mathbf{u}^2 + \frac{16\rho^6\,(\mathbf{u}\,d\mathbf{u})^2}{(\mathbf{u}^2+\rho^2)^4} - \frac{16\rho^4\,(\mathbf{u}\,d\mathbf{u})^2}{(\mathbf{u}^2+\rho^2)^3}.$$

Три последних члена взаимно уничтожаются, и мы имеем окончательно:

$$ds^2 = \frac{4\rho^4\,d\mathbf{u}^2}{(\mathbf{u}^2+\rho^2)^2} = \frac{4\rho^4\left[-du^{1^2} - \ldots - du^{k^2} + du^{k+1^2} + \ldots + du^{n-1^2}\right]}{\left[-u^{1^2} - \ldots - u^{k^2} + u^{k+1^2} + \ldots + u^{n-1^2} + \rho^2\right]^2}. \tag{87.14}$$

Это — метрическая квадратичная форма (линейный элемент) на гиперсфере S_{n-1}, записанная в параметрах $u^1, \ldots, u^{n-1}$. Метрический тензор $G_{\alpha\beta}(u^1, \ldots, u^{n-1})$ имеет, очевидно, в этих параметрах следующие координаты:

$$\left.\begin{aligned} &G_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha \neq \beta),\\ &G_{\alpha\alpha} = \mp\frac{4\rho^4}{\left[-u^{1^2} - \ldots - u^{k^2} + u^{k+1^2} + \ldots + u^{n-1^2} + \rho^2\right]^2}. \end{aligned}\right\} \tag{87.15}$$

Таким образом, мы получили метрику неевклидова пространства как частный случай римановой метрики.

Следует обратить внимание на свойственный стереографической проекции *конформный характер отображения* S_{n-1} *на* R_{n-1}. Действительно, пользуясь (87.13), получаем для линейного элемента на гиперплоскости

$$\tilde{d}s^2 = d\mathbf{u}^2.$$

Вставляя в (87.14), приходим к соотношению

$$ds^2 = \frac{4}{\left(1+\frac{\mathbf{u}^2}{\rho^2}\right)^2}\,\tilde{d}s^2, \tag{87.16}$$

которое показывает, что *метрические квадратичные формы на* S_{n-1} *и* R_{n-1} *для соответствующих бесконечно малых смещений отличаются* *множителем, зависящим лишь от точки.* Другими словами, координаты метрических тензоров в соответствующих точках M и L пропорциональны между собой. В этом случае взаимно однозначное соответствие между двумя римановыми пространствами называется *конформным.* Грубо говоря, это означает, что в бесконечно малой окрестности каждой данной точки на S_{n-1} линейные размеры фигур меняются при отображении на R_{n-1} пропорционально, так что в пределах этой окрестности отображение сводится как бы к преобразованию подобия (разумеется, если пренебречь бесконечно малыми высшего порядка).

Вернемся к формуле (87.14). Пользуясь ею, не нужно забывать, что мы рассматривали ρ только вещественные. Но чтобы учесть случай чисто мнимых ρ, достаточно в рассмотренной задаче *умножить метрическую квадратичную форму в R_n на -1, вследствие чего, во-первых, умножится на -1 и метрическая квадратичная форма на S_{n-1} и, во-вторых, S_{n-1} станет гиперсферой мнимого радиуса ρi.* При этом индекс k евклидова пространства R_n заменится на $n-k$.

Таким образом, мы имеем $2n$ вариантов $n-1$-мерной неевклидовой геометрии: во-первых, гиперсферы S_{n-1} вещественного радиуса ρ в R_n индекса $k=0, 1, \ldots, n-1$; метрика задается согласно (87.14); во-вторых, гиперсферы S_{n-1} мнимого радиуса ρi в R_n индекса $n-k=n, n-1, \ldots, 1$; метрика задается согласно (87.14) *с обратным знаком.*

Среди различных неевклидовых пространств особенно важны пространства *с собственно римановой метрикой*, т. е. с положительно определенной метрической квадратичной формой. При данном n такие пространства мы получим лишь в двух случаях: когда в (87.14) все квадраты положительны, т. е. $k=0$, или наоборот, когда они все отрицательны, $k=n-1$; в последнем случае нужно еще умножить метрическую квадратичную форму в R_{n-1} (а значит, и на S_{n-1}) на -1.

Первый случай, $k=0$. Пространство R_n собственно евклидово. Уравнение гиперсферы S_{n-1} имеет вид

$$x^{1^2}+\ldots+x^{n^2}=\rho^2. \tag{87.17}$$

Область изменения u^α — вся плоскость R_{n-1}; параметрическое представление (87.12) дает всю гиперсферу S_{n-1} за исключением центра проекций P. При этом к точке P на S_{n-1} мы неограниченно приближаемся при $u^{1^2}+\ldots+u^{n-1^2}\to\infty$. Метрическая квадратичная форма на S_{n-1} принимает вид

$$ds^2=4\frac{du^{1^2}+\ldots+du^{n-1^2}}{\left[1+\frac{u^{1^2}+\ldots+u^{n-1^2}}{\rho^2}\right]^2}. \tag{87.18}$$

Полученное неевклидово пространство называется *сферическим пространством Римана* в данном случае $n-1$ измерений (не смешивать с римановым пространством). Сферическая геометрия двух измерений, $n=3$, $n-1=2$, есть, очевидно, внутренняя геометрия обыкновенной сферы. Следует отметить родственное сферическому *эллиптическое пространство Римана.* Оно получается из сферического путем *отождествления диаметрально противоположных точек сферы* S_{n-1}. Таким образом, эллиптическое пространство есть как бы «сложенное вдвое» сферическое пространство. Хотя такая конструкция представляется искусственной, но фактически оказывается, что эллиптическое пространство обладает более простыми свойствами, чем сферическое, т. е. последнее целесообразно рассматривать именно «сложенным вдвое». Конечно, в пределах не слишком больших кусков эллиптическое пространство обладает той же геометрией, как и сферическое. Эллиптическое пространство можно получить, ограничившись в нашем параметрическом представлении лишь теми значениями u^α, которые удовлетворяют условиям

$$u^{1^2}+u^{2^2}+\ldots+u^{n-1^2}\leqslant\rho^2, \tag{87.19}$$

причем в полученном $n-1$-мерном шаре в плоскости R_{n-1} нужно отождествить диаметрально противоположные точки его граничной сферы S_{n-2}:

$$u^{1^2}+u^{2^2}+\ldots+u^{n-1^2}=\rho^2. \tag{87.20}$$

Тем самым $n-1$-мерный шар превращается в замкнутое $n-1$-мерное многообразие; в это многообразие вносится риманова метрика согласно (87.18), и полученное риманово пространство как раз и будет эллиптическим $n-1$-мерным пространством.

В самом деле, ограничение (87.19) означает, что мы рассматриваем лишь нижнюю половину гиперсферы S_{n-1}, срезанную плоскостью R_{n-1} (коэффициент при $\mathbf{e}_n$ в $(87.12)\leqslant 0$); далее на срезе, который как раз совпадает с S_{n-2}, мы отождествляем диаметрально противоположные точки, а это и означает построение эллиптического пространства, причем, вместо того чтобы отождествлять точки верхней половины S_{n-1} с диаметрально противоположными точками нижней половины, мы просто их (точки верхней половины) выкинули и провели указанное отождествление лишь по срезу.

Второй случай, $k=n-1$. Напишем уравнение гиперсферы радиуса ρ

$$-x^{1^2}-\ldots-x^{n-1^2}+x^{n^2}=\rho^2 \tag{87.21}$$

и параметрическое представление (87.12) (учитывая (87.9)):

$$\mathbf{x}=\frac{2\rho^2}{-u^{1^2}-\ldots-u^{n-1^2}+\rho^2}\,\mathbf{u}+\rho\left(1-\frac{2\rho^2}{-u^{1^2}-\ldots-u^{n-1^2}+\rho^2}\right)\mathbf{e}_n. \tag{87.22}$$

Меняем знак метрической квадратичной формы в R_n, после чего она принимает вид

$$\mathbf{x}^2 = x^{1^2} + \ldots + x^{n-1^2} - x^{n^2}. \tag{87.23}$$

Вследствие этого меняется знак и у метрической квадратичной формы на S_{n-1}, так что (87.14) запишется теперь

$$ds^2 = \frac{4\rho^4 (du^{1^2} + \ldots + du^{n-1^2})}{[\rho^2 - u^{1^2} - \ldots - u^{n-1^2}]^2} = 4\,\frac{du^{1^2} + \ldots + du^{n-1^2}}{\left[1 - \frac{u^{1^2} + \ldots + u^{n-1^2}}{\rho^2}\right]^2}. \tag{87.24}$$

При этом, хотя гиперсферу S_{n-1} мы оставляем прежней, но в результате изменения метрики в R_n ее радиус становится мнимым, ρi вместо ρ.

Итак, мы имеем дело с гиперсферой мнимого радиуса ρi в псевдоевклидовом пространстве индекса 1. Такая гиперсфера с *аффинной точки зрения* представляет собой двухполостный гиперболоид. При этом в параметрическом представлении (87.22) мы получаем нижнюю полость, когда коэффициент при $\mathbf{e}_n$ отрицателен:

$$1 - \frac{2\rho^2}{\rho^2 - u^{1^2} - \ldots - u^{n-1^2}} < 0,$$

что равносильно неравенству

$$u^{1^2} + \ldots + u^{n-1^2} < \rho^2. \tag{87.25}$$

Таким образом, на нижнюю полость S_{n-1} отображается внутренность шара радиуса ρ в плоскости R_{n-1}; аналогично на верхнюю полость S_{n-1} (за исключением точки P) отображается внешняя по отношению к этому шару часть плоскости R_{n-1}:

$$u^{1^2} + \ldots + u^{n-1^2} > \rho^2 \tag{87.26}$$

(точки на граничной сфере $u^{1^2} + \ldots + u^{n-1^2} = \rho^2$ образов на S_{n-1} не имеют). Достаточно рассмотреть нижнюю полость S_{n-1}, так как верхняя полость в силу симметрии несет на себе точно такую же риманову геометрию, хотя формула (87.22) и дает для разных полостей разные параметрические представления (в том смысле, что параметры $u^1, \ldots, u^{n-1}$ пробегают разные области изменения). Но это уже связано с избранным нами способом параметризации.

Итак, нижняя полость гиперсферы S_{n-1}, рассматриваемая как риманово пространство, задается метрической квадратичной формой (87.24) *в области изменения параметров* (87.25). В отличие от сферического и эллиптического пространств полученное пространство представляет собой *элементарное* многообразие.

Каждая полость гиперсферы мнимого радиуса ρi в псевдоевклидовом пространстве индекса 1 *несет на себе собственно риманову геометрию, совпадающую с геометрией Лобачевского соответствующего числа измерений.*

Эту формулировку можно при желании рассматривать как определение геометрии Лобачевского; если же исходить из другого, например, аксиоматического построения геометрии Лобачевского, то это предложение можно доказать как теорему.

Мы получили пространство Лобачевского во взаимно однозначном отображении на внутренность шара в евклидовом пространстве R_{n-1}; это отображение называется интерпретацией Пуанкаре.

Возвращаясь к общему случаю неевклидова пространства S_{n-1}, отметим, что оно обладает *свободной подвижностью* так же, как и евклидово пространство. Этим мы хотим сказать, что в S_{n-1} точку с ортонормированным локальным репером в ней всегда можно перевести движением S_{n-1} (т. е. его изометрическим отображением на себя) *в любую другую точку с любым ортонормированным локальным репером в ней.* Покажем это.

При нашем понимании неевклидовой геометрии как римановой геометрии на гиперсфере S_{n-1} в R_n движения в S_{n-1} также наглядно изображаются *вращениями в R_n около начала O*. Ясно, что при этом гиперсфера S_{n-1} переходит в себя с сохранением всех ее геометрических свойств, в том числе и римановой геометрии на ней. При этом путем вращения R_n около O можно заставить ортонормированный репер $\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ перейти в любой другой ортонормированный репер $\{O, \tilde{\mathbf{e}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{e}}_n\}$. С точки зрения S_{n-1} это означает, что вектор $\rho\mathbf{e}_n$, идущий из O в точку P*), превращается в вектор $\rho\tilde{\mathbf{e}}_n$, идущий в другую точку $\tilde{P}$ той же гиперсферы S_{n-1}, причем $\tilde{P}$ можно выбирать произвольно (так как при желании $\tilde{\mathbf{e}}_n$ всегда можно направить по $O\tilde{P}$). Далее, векторы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}$ ортогональны к $\rho\mathbf{e}_n = \overrightarrow{OP}$ и потому принадлежат касательной гиперплоскости R'_{n-1} к S_{n-1} в точке P, образуя *ортонормированный локальный репер для S_{n-1}*. При задании точки P определяется орт $\mathbf{e}_n$, направленный по $\overrightarrow{OP}$, но орты $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}$ в ортогональной к $\mathbf{e}_n$ плоскости R'_{n-1} остаются произвольными и образуют произвольный ортонормированный локальный репер в точке P. Поэтому возможность перевести векторы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ вращением R_n около O в соответствующие векторы любого другого ортонормированного репера означает с точки зрения гиперсферы S_{n-1}, что не только точка P

---

*) Для определенности рассматриваем S_{n-1} вещественного радиуса ρ.

переходит в любую другую точку $\tilde{P}$, но и ортонормированный локальный репер в P переходит в любой ортонормированный локальный репер в $\tilde{P}$.

В связи с этим ясно, что произвол в выборе движений в неевклидовом пространстве (т. е. число независимых параметров, определяющих движение) должен быть таким же, как и в евклидовом пространстве. Это можно проверить и прямым подсчетом. В евклидовом n-мерном пространстве R_n движение зависит от $\frac{n(n+1)}{2}$ параметров; следовательно, в R_{n-1} — от $\frac{(n-1)n}{2}$ параметров. Заметим, что под «числом параметров», строго говоря, нужно понимать здесь размерность группы движений, как некоторого (неэлементарного) многообразия. Движения в S_{n-1} порождаются вращениями R_n около O и, следовательно, тоже зависят от $\frac{(n-1)n}{2}$ параметров.

Свободная подвижность неевклидовых пространств показывает, что они обладают столь же высокой степенью однородности, как и евклидовы пространства. С этим связано и богатство их геометрических свойств, развертывающихся в последовательности, напоминающей евклидову геометрию, но совершенно своеобразных. Как и евклидово пространство, они допускают исследование элементарно геометрическими средствами, особенно эллиптическая геометрия и геометрия Лобачевского. Последняя этим путем и была впервые получена Лобачевским.

Исследование элементарно геометрическими средствами тесно связано со свободной подвижностью пространства. Действительно, важнейшей основой элементарной геометрии является возможность переносить данную фигуру из одного места пространства в другое и поворачивать ее без изменения геометрических свойств. Но это означает по существу свободную подвижность пространства. Отсюда вытекает понятие о конгруэнтных (равных) фигурах, как переводимых одна в другую посредством движения; на основе свободной подвижности фигур доказываются важнейшие теоремы, например, о равенстве треугольников; даже процесс измерения отрезка другим отрезком, принятым за эталон длины, требует свободной подвижности этого эталона. Конечно, в элементарной геометрии в ее школьном изложении свойство свободной подвижности принимается просто как очевидное, но при аксиоматическом построении оно должно быть точно охарактеризовано соответствующими аксиомами (или прямо, или косвенно через понятие конгруэнтности).

Другие римановы пространства свободной подвижностью уже не обладают; более того, произвольно взятое риманово пространство, *вообще говоря*, совершенно неоднородно и никаких движений не допускает.