§ 88. Измерение объемов в римановом пространстве V_n

Мы хотим ввести измерение объемов в римановом пространстве. Изложим сначала некоторые наводящие соображения. Рассмотрим бесконечно малый координатный параллелепипед, стягивающийся в данную точку $M(x^i)$. Вообще под *координатным параллелепипедом* мы понимаем область, состоящую из точек $\tilde{M}$ $(\tilde{x}^i)$, для которых

$$a^i \leqslant \tilde{x}^i \leqslant b^i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{88.1}$$

В данном случае координатный параллелепипед определяется неравенствами

$$x^i \leqslant \tilde{x}^i \leqslant x^i + dx^i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{88.2}$$

где $dx^i \to 0$.

«Ребра» этого параллелепипеда состоят из бесконечно малых отрезков координатных линий. Так, на координатной линии x^1 соответствующий отрезок заключен между данной точкой $M(x^1, \ldots, x^n)$ и точкой $M_1(x^1 + dx^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^n)$. В касательном евклидовом пространстве бесконечно малому смещению MM_1 отвечает бесконечно малый вектор с координатами

$$\xi^1 = dx^1,\ \xi^2 = \ldots = \xi^n = 0 \tag{88.3}$$

(координаты берутся относительно локального репера). Аналогично обстоит дело и с бесконечно малыми смещениями по другим координатным линиям.

Подменим координатный параллелепипед соответствующим параллелепипедом в касательном евклидовом пространстве, построенном на бесконечно малых векторах вида (88.3). Согласно (54.11) объем параллелепипеда в евклидовом пространстве выражается формулой

$$W_D = \sqrt{|g|}\,|\mathrm{Det}\,|a_k^i||,$$

где $g = \mathrm{Det}\,|g_{ij}|$, a_k^i — координаты k-го вектора из числа векторов, на которых построен параллелепипед. В нашем случае

$$a_k^i = \begin{cases} 0 & (i \neq k) \\ dx^i & (i = k) \end{cases}, \text{ так что } \mathrm{Det}\,|a_k^i| = dx^1\ \ldots\ dx^n,$$

и мы получаем:

$$dW = \sqrt{|g|}\,dx^1 \ldots dx^n. \tag{88.4}$$

Оценим грубо объем какой-либо области D риманова пространства как составленный из объемов элементарных координатных параллелепипедов, на которые мы область D разбиваем, причем мы их подменяем параллелепипедами в касательных евклидовых пространствах. Суммирование таких объемов в пределе сводится к интегрированию элемента объема dW (88.4) по области D, и мы получаем:

$$W_D = \int_D \sqrt{|g|}\, dx^1 \ \dots \ dx^n. \tag{88.5}$$

Мы не станем уточнять приведенное выше грубое рассуждение, а предпочтем принять формулу (88.5) за *определение объема в римановом пространстве*. Чтобы это определение было законным, нужно показать его инвариантность при преобразовании координат x^i. Для этой цели вычислим

$$W'_D = \int_D \sqrt{|g'|}\, dx^{1'} \ \dots \ dx^{n'}, \tag{88.6}$$

где $g' = \operatorname{Det} |g_{i'j'}|$, и покажем что $W'_D = W_D$.

По тензорному закону преобразования

$$g_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} g_{ij},$$

откуда аналогично (39.17) получаем:

$$\operatorname{Det} |g_{i'j'}| = \left(\operatorname{Det} \left| \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \right| \right)^2 \operatorname{Det} |g_{ij}|,$$

так что

$$\sqrt{|g'|} = \left| \operatorname{Det} \left| \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \right| \right| \sqrt{|g|}. \tag{88.7}$$

Вставляя последний результат в (88.6) и пользуясь формулой замены переменных под знаком кратного интеграла, получим:

$$W'_D = \int_D \sqrt{|g|} \left| \operatorname{Det} \left| \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \right| \right| dx^{1'} \dots dx^{n'} = \int_D \sqrt{|g|}\, dx^1 \dots dx^n = W_D,$$

что и требовалось доказать.

Очевидно, по свойствам кратного интеграла объем обладает аддитивным характером, т. е. объем составной области равен сумме объемов составляющих областей. Далее, в частном случае евклидова пространства (88.5) дает объем в евклидовом пространстве. Действительно, если $x^1, \dots, x^n$ — ортонормированные координаты в евклидовом пространстве, то $|g| = 1$, и мы получаем:

$$W_D = \int_D dx^1 \dots dx^n,$$

а это согласуется с определением объема в евклидовом пространстве (54.1).

Пусть в римановом пространстве V_n дана поверхность V_m, также несущая на себе риманову геометрию (§ 85). На этой поверхности мы можем, следовательно, измерять объемы m-мерных областей по формуле (88.5):

$$W_D = \int_D \sqrt{|G|}\, du^1 \ldots du^m, \tag{88.8}$$

где

$$G = \operatorname{Det} | G_{\alpha\beta} |, \quad G_{\alpha\beta} = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}. \tag{88.9}$$

В частности, в случае двумерной поверхности V_2 мы получаем:

$$G = G_{11} G_{22} - G_{12}^2,$$

так что «двумерные объемы», т. е. площади на поверхности, выражаются формулой

$$W_D = \int_D \sqrt{| G_{11} G_{22} - G_{12}^2 |}\, du^1 du^2.$$

Если речь идет о поверхности в обычном евклидовом пространстве R_3, то G_{11}, G_{12}, G_{22} — коэффициенты первой квадратичной формы на поверхности. При этом $G_{11}G_{22} - G_{12}^2 > 0$, так что знак модуля под радикалом можно устранить.

Как видно из (88.9), $G_{\alpha\beta}$ представляют собой попарные скалярные произведения m векторов $\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$, касательных к координатным линиям u^α на поверхности V_m. Поэтому подынтегральная функция $\sqrt{|G|}$, т. е. $\sqrt{|\operatorname{Det} | G_{\alpha\beta} ||}$, представляет собой объем m-мерного параллелепипеда, построенного на векторах $\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, \ldots$ $\ldots, m$) в касательном евклидовом пространстве. Но этот же объем выражается формулой (54.28), так что

$$\sqrt{|G|} = \sqrt{| g_{i_1 \ldots i_m;\, j_1 \ldots j_m} a^{i_1 \ldots i_m} a^{j_1 \ldots j_m} |}. \tag{88.10}$$

Здесь $a^{i_1 \ldots i_m}$ — координаты простого m-вектора, построенного на векторах $\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$, т. е.

$$a^{i_1 i_2 \ldots i_m} = \frac{1}{m!} \begin{vmatrix} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^1} & \frac{\partial x^{i_2}}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^{i_m}}{\partial u^1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^m} & \frac{\partial x^{i_2}}{\partial u^m} & \cdots & \frac{\partial x^{i_m}}{\partial u^m} \end{vmatrix}, \tag{88.11}$$

а $g_{i_1 \ldots i_m;\, j_1 \ldots j_m}$ выражаются согласно (54.19):

$$g_{i_1 \ldots i_m;\, j_1 \ldots j_m} = \begin{vmatrix} g_{i_1 j_1} \cdots g_{i_1 j_m} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ g_{i_m j_1} \cdots g_{i_m j_m} \end{vmatrix}. \tag{88.12}$$

В то время как формула (88.8) дает нам объем области D на поверхности V_m с «внутренней» точки зрения, можно записать тот же результат с «внешней» точки зрения, заменив $\sqrt{|G|}$ согласно (88.10). Получим:

$$W_D = \int\limits_D \sqrt{|g_{i_1 \ldots i_m;\, j_1 \ldots j_m} a^{i_1 \ldots i_m} a^{j_1 \ldots j_m}|}\, du^1 \ldots du^m. \tag{88.13}$$

В частности, получаем выражение площади какой-либо области D на двумерной поверхности V_2 в виде

$$W_D = \frac{1}{2} \int\limits_D \sqrt{\begin{vmatrix} g_{i_1 j_1} & g_{i_1 j_2} \\ g_{i_2 j_1} & g_{i_2 j_2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^1} & \frac{\partial x^{i_2}}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^2} & \frac{\partial x^{i_2}}{\partial u^2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial u^1} & \frac{\partial x^{j_2}}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x^{j_1}}{\partial u^2} & \frac{\partial x^{j_2}}{\partial u^2} \end{vmatrix}}\, du^1\, du^2. \tag{88.14}$$

Подкоренное выражение предполагается взятым по модулю (после суммирования по всем индексам).

§ 89. Пространство аффинной связности

Мы на время оставим в стороне римановы пространства и займемся другим вариантом геометрии, которую можно получить на базе данного n-мерного многообразия $\mathfrak{M}_n$. Именно, если вместо поля метрического тензора $g_{ij}(M)$ внести в $\mathfrak{M}_n$ поле объекта связности $\Gamma^i_{jk}(M)$, то вместо римановой геометрии мы получим в $\mathfrak{M}_n$ *геометрию аффинной связности*, превратив $\mathfrak{M}_n$ *в пространство аффинной связности* L_n.

Подобно тому как образцом для построения риманова пространства V_n служило у нас евклидово пространство R_n в криволинейных координатах, так теперь такую же роль будет играть аффинное пространство A_n тоже в криволинейных координатах. Определение объекта связности, которое было дано в § 78 для аффинного пространства, легко переносится на многообразие $\mathfrak{M}_n$.

Если в данной точке M в $\mathfrak{M}_n$ для каждой координатной системы x^i, область действия которой включает точку M, задана система