а $g_{i_1 \ldots i_m;\, j_1 \ldots j_m}$ выражаются согласно (54.19):

$$g_{i_1 \ldots i_m;\, j_1 \ldots j_m} = \begin{vmatrix} g_{i_1 j_1} \ldots g_{i_1 j_m} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ g_{i_m j_1} \ldots g_{i_m j_m} \end{vmatrix}. \tag{88.12}$$

В то время как формула (88.8) дает нам объем области D на поверхности V_m с «внутренней» точки зрения, можно записать тот же результат с «внешней» точки зрения, заменив $\sqrt{|G|}$ согласно (88.10). Получим:

$$W_D = \int\limits_D \sqrt{|g_{i_1 \ldots i_m;\, j_1 \ldots j_m} a^{i_1 \ldots i_m} a^{j_1 \ldots j_m}|}\, du^1 \ldots du^m. \tag{88.13}$$

В частности, получаем выражение площади какой-либо области D на двумерной поверхности V_2 в виде

$$W_D = \frac{1}{2} \int\limits_D \sqrt{\begin{vmatrix} g_{i_1 j_1} & g_{i_1 j_2} \\ g_{i_2 j_1} & g_{i_2 j_2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^{i_1}}{\partial u^1} & \dfrac{\partial x^{i_2}}{\partial u^1} \\ \dfrac{\partial x^{i_1}}{\partial u^2} & \dfrac{\partial x^{i_2}}{\partial u^2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^{j_1}}{\partial u^1} & \dfrac{\partial x^{j_2}}{\partial u^1} \\ \dfrac{\partial x^{j_1}}{\partial u^2} & \dfrac{\partial x^{j_2}}{\partial u^2} \end{vmatrix}}\, du^1\, du^2. \tag{88.14}$$

Подкоренное выражение предполагается взятым по модулю (после суммирования по всем индексам).

§ 89. Пространство аффинной связности

Мы на время оставим в стороне римановы пространства и займемся другим вариантом геометрии, которую можно получить на базе данного n-мерного многообразия $\mathfrak{M}_n$. Именно, если вместо поля метрического тензора $g_{ij}(M)$ внести в $\mathfrak{M}_n$ поле объекта связности $\Gamma^i_{jk}(M)$, то вместо римановой геометрии мы получим в $\mathfrak{M}_n$ *геометрию аффинной связности*, превратив $\mathfrak{M}_n$ *в пространство аффинной связности* L_n.

Подобно тому как образцом для построения риманова пространства V_n служило у нас евклидово пространство R_n в криволинейных координатах, так теперь такую же роль будет играть аффинное пространство A_n тоже в криволинейных координатах. Определение объекта связности, которое было дано в § 78 для аффинного пространства, легко переносится на многообразие $\mathfrak{M}_n$.

Если в данной точке M в $\mathfrak{M}_n$ для каждой координатной системы x^i, область действия которой включает точку M, задана система *чисел Γ^k_{ij}, преобразующихся при переходе от одной к другой координатной системе по закону*

$$\Gamma^{k'}_{i'j'} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \Gamma^k_{ij}, \tag{89.1}$$

то мы говорим, что в точке M задан объект связности. Все частные производные в (89.1) предполагаются вычисленными в точке M.

Пространством аффинной связности L_n мы назовем многообразие $\mathfrak{M}_n$, в котором задано поле объекта связности

$$\Gamma^k_{ij}(M) = \Gamma^k_{ij}(x^1, \ldots, x^n), \tag{89.2}$$

т. е. объект связности задан в каждой точке M, причем функции (89.2) $N-2$ *раза непрерывно дифференцируемы* *). При этом в отличие от объекта связности аффинного пространства, вообще говоря,

$$\Gamma^k_{ij} \neq \Gamma^k_{ji}.$$

Покажем прежде всего, что для задания объекта связности (как мы будем кратко называть поле объекта связности) в элементарном $\mathfrak{M}_n$ достаточно произвольно *задаться функциями* (89.2) *в одной какой-нибудь координатной системе x^i.* Тогда в любой другой координатной системе $x^{i'}$ координаты $\Gamma^{k'}_{i'j'}$ объекта связности определятся по закону преобразования (89.1). Однако при этом объект связности еще нельзя считать построенным: нужно проверить, что закон преобразования (89.1) действует не только при переходе от x к $x^{i'}$, где x^i — начальная координатная система, но и при переходе от $x^{i'}$ к $x^{i''}$, где $x^{i'}$, $x^{i''}$ — любые координатные системы. Координаты объекта связности в системе $x^{i''}$ выражаются аналогично (89.1):

$$\Gamma^{k''}_{i''j''} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i''} \partial x^{j''}} \frac{\partial x^{k''}}{\partial x^k} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i''}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j''}} \frac{\partial x^{k''}}{\partial x^k} \Gamma^k_{ij}. \tag{89.3}$$

Нам требуется проверить, следовательно, что, подвергая $\Gamma^{k'}_{i'j'}$ преобразованию по тому же закону при переходе от $x^{i'}$ к $x^{i''}$, мы получим $\Gamma^{k''}_{i''j''}$. Другими словами, требуется проверить, что выражение

$$\frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^{i''} \partial x^{j''}} \frac{\partial x^{k''}}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i''}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j''}} \frac{\partial x^{k''}}{\partial x^{k'}} \Gamma^{k'}_{i'j'} \tag{89.4}$$

---

*) Здесь N — класс многообразия $\mathfrak{M}_n$; при преобразовании (89.1) сохраняется $(N-2)$-дифференцируемость Γ^k_{ij} (но не выше!). Правая часть (89.2) имеет смысл, разумеется, лишь в области действия каждой данной координатной системы x^i.

дает нам $\Gamma^{k''}_{i''j''}$. Для этого вставим сюда $\Gamma^{k'}_{i'j'}$ из (89.1) и рассмотрим сначала член, содержащий Γ^k_{ij}. Этот член в (89.1) имеет такой вид, как если бы Γ^k_{ij} подвергались *тензорному* закону преобразования при переходе от x^i к $x^{i'}$; при подстановке в (89.4) этот член еще раз подвергается *тензорному* закону преобразования при переходе от $x^{i'}$ к $x^{i''}$; в результате Γ^k_{ij} испытают преобразование по тензорному закону при переходе от x^i к $x^{i''}$ (см. § 81, (81.3)), и мы получим:

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{i''}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j''}} \frac{\partial x^{k''}}{\partial x^k} \Gamma^k_{ij}. \tag{89.5}$$

Теперь рассмотрим свободные от Γ^k_{ij} члены в (89.4) (после подстановки из (89.1)). Получаем (обозначая в первом члене индекс суммирования j' вместо k'):

$$\frac{\partial^2 x^{j'}}{\partial x^{i''} \partial x^{j''}} \frac{\partial x^{k''}}{\partial x^{j'}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i''}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j''}} \frac{\partial x^{k''}}{\partial x^{k'}} \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}.$$

Так как во втором члене

$$\frac{\partial x^{k''}}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} = \frac{\partial x^{k''}}{\partial x^k},$$

а в первом члене

$$\frac{\partial x^{k''}}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial x^{k''}}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}},$$

то, вынося $\frac{\partial x^{k''}}{\partial x^k}$ за скобки, получаем:

$$\frac{\partial x^{k''}}{\partial x^k} \left(\frac{\partial^2 x^{j'}}{\partial x^{i''} \partial x^{j''}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i''}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j''}} \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\, dx^{j'}} \right) = \frac{\partial x^{k''}}{\partial x^k} \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i''} \partial x^{j''}}. \tag{89.6}$$

То, что круглая скобка равна $\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i''} \partial x^{j''}}$, легко получить, дифференцируя x^k как сложную функцию от $x^{1''}, \ldots, x^{n''}$ при промежуточных аргументах $x^{j'}$. В результате (89.4) состоит из членов (89.5) и (89.6), т. е. совпадает с правой частью (89.3) и дает, действительно, $\Gamma^{k''}_{i''j''}$. Проверка окончена.

Закон преобразования (89.1) можно записать в несколько ином виде, удобном для некоторых выкладок. Умножаем (89.1) почленно на $\frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}}$ и суммируем по k'. Так как

$$\frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} = \delta^l_k,$$

то получаем:

$$\Gamma^{k'}_{i'j'} \frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \delta^l_k + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \Gamma^k_{ij} \delta^l_k,$$

а после суммирования по k получаем окончательно:

$$\Gamma^{k'}_{i'j'} \frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}} = \frac{\partial^2 x^l}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \Gamma^l_{ij}. \qquad (89.7)$$

Заметим, что эта формула вполне эквивалентна закону преобразования (89.1), так как он из нее обратно следует. Достаточно умножить (89.7) почленно на $\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^l}$ (с суммированием по l) и учесть, что в левой части $\frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^l} = \delta^{l'}_{k'}$, чтобы вернуться к (89.1).

Будет полезным записать формулу (89.7), поменяв ролями координаты x^i и $x^{i'}$. Получим:

$$\Gamma^k_{ij} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 x^{l'}}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \Gamma^{l'}_{i'j'}. \qquad (89.8)$$

Мы уже отмечали, что, вообще говоря,

$$\Gamma^k_{ij} \neq \Gamma^k_{ji}.$$

Обозначим:

$$S^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}. \qquad (89.9)$$

Величины S^k_{ij} образуют тензор, что легко показать следующим образом. Перепишем (89.1), переставив между собой индексы i', j' и поменяв местами обозначения индексов суммирования i, j. Получим:

$$\Gamma^{k'}_{j'i'} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{j'} \partial x^{i'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} + \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \Gamma^k_{ji}. \qquad (89.10)$$

Вычитая это равенство почленно из (89.1) и пользуясь обозначением (89.9) как в старых, так и в новых координатах, получаем:

$$S^{k'}_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} S^k_{ij}.$$

Свободные члены при вычитании уничтожились, и мы получили тензорный закон преобразования для S^k_{ij}. Тензор $S^k_{ij}(M)$ называется *тензором кручения* данного пространства аффинной связности. Его геометрический смысл выяснится позже. Если тензор кручения S^k_{ij} равен нулю, т. е. если

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji},$$

то мы говорим, что нам дано *пространство аффинной связности без кручения;* обозначаем его L^0_n. Обращение в нуль тензора S^k_{ij} (как и всякого тензора) есть факт, инвариантный относительно преобразования координат x^i, а потому, если $\Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ji}$ в одной координатной системе, то то же имеет место и в любой другой.

Переходим теперь к геометрическому истолкованию объекта связности, а вместе с тем к установлению основной конструкции геометрии аффинной связности — *параллельного перенесения векторов*. Мы воспользуемся при этом аналогией с § 77, где параллельное перенесение вектора *в криволинейных координатах в аффинном пространстве* задавалось при помощи объекта связности формулой (77.9):

$$d\xi^k=-\Gamma^k_{ij}\xi^j\,dx^i.$$

Аналогичным образом мы определим параллельное перенесение в пространстве аффинной связности L_n.

Пусть вдоль некоторой кривой

$$x^i=x^i(t),\quad a\leqslant t\leqslant b,$$

где $x^i(t)$ непрерывно дифференцируемое, дано векторное поле

$$\xi^i=\xi^i(t). \tag{89.11}$$

Мы будем говорить, что вектор $\xi^i(t)$ параллельно переносится вдоль кривой, если при каждом бесконечно малом смещении по кривой координаты вектора $\xi^i(t)$ меняются по закону

$$d\xi^k=-\Gamma^k_{ij}\xi^j dx^i. \tag{89.12}$$

Речь идет, конечно, не о приращениях, а о дифференциалах координат $\xi^i(t)$. Аналогично dx^i — дифференциалы функции $x^i(t)$; Γ^k_{ij} — координаты объекта связности. Напомним еще, что ξ^i — это по буквальному смыслу один раз контравариантный тензор; мы говорим о векторе ξ^i, имея в виду истолкование ξ^i в виде вектора *в касательном аффинном пространстве* A_n (§ 82).

Если вдуматься в смысл нашего определения параллельного перенесения, то оно перестает казаться столь произвольным, как кажется с первого взгляда. В самом деле, мы хотим установить какой-то определенный закон, по которому вектор ξ^i из данной точки x^i переносится в бесконечно близкую точку x^i+dx^i (рассуждение ведем с точностью до бесконечно малых высшего порядка). Спрашивается, каковы будут при этом приращения $d\xi^i$ координат нашего вектора. Простейшее предположение на этот счет, которое можно сделать, заключается в том, что $d\xi^i$ линейно зависят и от начальных координат вектора ξ^i и от координат вектора бесконечно малого смещения dx^i. Но по существу это предположение и записано в виде формулы (89.12), причем через Γ^k_{ij} обозначены коэффициенты соответствующих билинейных функций. Конечно, выбор коэффициентов $\Gamma^k_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$ остается произвольным, и это означает, что на данное многообразие $\mathfrak{M}_n$ можно по-разному наложить аффинную связность.

Таким рассуждением мы оправдываем наше определение с его содержательной стороны. Но оно нуждается в оправдании и с формальной стороны. А именно, необходимо показать его инвариантный характер: *если вектор $\xi^i(t)$ параллельно переносится вдоль данной кривой с точки зрения одной координатной системы x^i, то это же верно и с точки зрения любой другой координатной системы $x^{i'}$*. Другими словами, если условие (89.12) соблюдается в координатах x^i, то оно будет соблюдаться и в координатах $x^{i'}$.

Чтобы проверить это, мы вычислим $d\xi^{k'}(t)$ при бесконечно малом смещении по нашей кривой. Согласно тензорному закону преобразования

$$\xi^{k'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\xi^k.$$

Поэтому

$$d\xi^{k'} = \left(d\,\frac{\partial x^{k'}}{dx^k}\right)\xi^k + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\,d\xi^k = \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^k\,\partial x^i}dx^i\,\xi^k + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\,d\xi^k.$$

Обозначая в первом члене индекс суммирования k через j и заменяя $d\xi^k$ согласно (89.12), получаем:

$$d\xi^{k'} = \left(\frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^j\,\partial x^i} - \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\,\Gamma^k_{ij}\right)\xi^j dx^i. \tag{89.13}$$

Пользуясь формулой (89.8) (заменив в ней l' на k'), мы получаем для круглой скобки выражение

$$-\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\,\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}\,\Gamma^{k'}_{i'j'}.$$

Учитывая, наконец, что

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\,dx^i = dx^{i'},\quad \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}\,\xi^j = \xi^{j'},$$

приводим (89.13) к виду

$$d\xi^{k'} = -\Gamma^{k'}_{i'j'}\,\xi^{j'}\,dx^{i'}. \tag{89.14}$$

Таким образом, предполагая, что для векторного поля вдоль данной кривой соблюдается (89.12), мы получили, что соблюдается и (89.14), т. е. наше определение параллельного перенесения инвариантно относительно преобразования координат x^i. Важнейшим местом нашей выкладки является *использование закона преобразования для* Γ^k_{ij} в форме (89.8). Можно сказать, что закон преобразования Γ^k_{ij} подобран именно так, чтобы параллельное перенесение вектора, определенное согласно (89.12), было *инвариантным* относительно преобразования координат x^i. И действительно, если потребовать эту инвариантность (для перенесения любого вектора вдоль любой кривой), то наш закон преобразования для Γ^k_{ij} получается как следствие. В этом можно убедиться следующим образом. В силу инвариантности данного параллельного перенесения формулы (89.12), (89.14) должны вытекать одна из другой. По-прежнему преобразуем (89.12) к виду (89.13), а в (89.14) подставляем

$$dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} dx^i, \qquad \xi^{j'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \xi^j.$$

Так как полученные формулы должны вытекать одна из другой, то их правые части тождественно равны; приравнивая коэффициенты при dx^i, ξ^j, возвращаемся к формуле (89.8), т. е. к прежнему закону преобразования для Γ^k_{ij}.

Заметим, что в случае аффинного пространства мы не нуждались в доказательстве инвариантности параллельного перенесения; там оно имело непосредственный геометрический смысл и, в отличие от того, что мы делаем сейчас, *не определялось, а лишь записывалось* формулой (89.12).

Мы определили параллельное перенесение вектора вдоль кривой, однако не знаем еще, когда можно такое перенесение осуществлять и будет ли оно совершаться однозначно. Обращаясь к формулам (89.12), мы перепишем их, поделив на dt:

$$\frac{d\xi^k}{dt} = -\Gamma^k_{ij}(x^1(t), \ \ldots, \ x^n(t))\, \xi^j \frac{dx^i(t)}{dt}. \tag{89.15}$$

Так как Γ^k_{ij} в данном пространстве и в данной координатной системе нам известны как функции от x^i, а x^i вдоль данной кривой известны как функции от t, то в уравнениях (89.15) все функции от t можно считать известными кроме $\xi^k(t)$, которые мы будем считать искомыми. Для этих n функций мы имеем нормальную систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений; производная каждой неизвестной функции $\xi^k(t)$ линейно выражена через сами неизвестные функции ξ^k, причем коэффициентами служат известные функции от t (при наших предположениях во всяком случае непрерывные).

Из теории дифференциальных уравнений известно, что такая система имеет решение $\xi^k(t)$ при любых начальных условиях вида

$$\xi^k = \xi^k_0 \quad (k = 1, \ 2, \ \ldots, \ n) \text{ при } t = t_0, \tag{89.16}$$

причем это решение определяется единственным образом и существует на всем интервале изменения t.

тождественно равнялся единице. Для этого достаточно положить:

$$\tau = \int \alpha(t)\,dt, \text{ так что } d\tau = \alpha(t)\,dt, \tag{90.2}$$

после чего (90.1) принимает вид:

$$\frac{dx^i}{d\tau} = \xi^i. \tag{90.3}$$

Параметр τ *на геодезической, для которого* $\frac{dx^i}{d\tau}$ *есть параллельно переносимый касательный вектор, мы будем называть каноническим параметром.* Как мы показали, переход к каноническому параметру всегда возможен. При этом канонический параметр выбирается с точностью до произвольного линейного преобразования с постоянными коэффициентами

$$\tau^* = A\tau + B, \quad A \neq 0. \tag{90.4}$$

Действительно, если τ — канонический параметр, то и τ^* тоже, так как

$$d\tau^* = A\,d\tau, \quad \frac{dx^i}{d\tau^*} = \frac{1}{A}\frac{dx^i}{d\tau} \quad \left(\frac{1}{A} = \text{const}\right)$$

и вектор $\frac{dx^i}{d\tau^*}$ будет вместе с $\frac{dx^i}{d\tau}$ *параллельно переносимым* касательным вектором.

С другой стороны, *формула* (90.4) *исчерпывает все возможные способы выбора канонического параметра.* В самом деле, если τ и τ^* — два канонических параметра, то векторы $\frac{dx^i}{d\tau}$, $\frac{dx^i}{d\tau^*}$ оба параллельно переносятся вдоль кривой, а следовательно, в равенстве

$$\frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{d\tau^*}\frac{d\tau^*}{d\tau}$$

коэффициент $\frac{d\tau^*}{d\tau}$ должен быть постоянным (линейные зависимости между параллельно переносимыми векторами сохраняются). Отсюда следует, что зависимость τ^* от τ обязательно будет линейной.

Мы дали определение геодезических линий, но не знаем еще, существуют ли они, с каким произволом их можно выбирать и как фактически их строить. На эти вопросы дают ответ *дифференциальные уравнения геодезических линий.*

Будем искать параметрические уравнения геодезических линий с каноническим параметром τ:

$$x^i = x^i(\tau). \tag{90.5}$$

Запишем требование, чтобы вектор $\frac{dx^i}{d\tau}$ *параллельно переносился вдоль искомой кривой; это будет означать одновременно, что кривая геодезическая и что параметр* τ *на ней канонический.*

Далее, если в начальной точке $\zeta_0^i = \xi_0^i + \eta_0^i$, то в процессе параллельного перенесения этих трех векторов сохраняется зависимость

$$\zeta^i(t) = \xi^i(t) + \eta^i(t). \tag{89.20}$$

В самом деле, складывая почленно (89.18) и (89.19), убеждаемся, что вектор $\xi^i + \eta^i$ тоже удовлетворяет формуле параллельного перенесения и, следовательно, переносится параллельно вместе с ξ^i и η^i. Поскольку вектор ζ^i тоже переносится параллельно, то равенство между ζ^i и $\xi^i + \eta^i$, имеющее место в начальной точке, сохраняется все время, и мы приходим к (89.20).

Так как все линейные зависимости между векторами сводятся к рассмотренным простейшим (89.17) и (89.20), то все они сохраняются при параллельном перенесении.

§ 90. Геодезические линии в L_n

Геодезические линии в пространстве аффинной связности играют приблизительно такую же роль, как прямые линии в аффинном пространстве. Именно, они обладают тем же основным свойством — *постоянством направления*. Для прямых линий это свойство выражается в том, что вектор, направленный по данной прямой линии в какой-нибудь ее точке, будет направлен по ней и в любой другой ее точке. Аналогично этому мы формулируем определение геодезической линии.

Кривая в пространстве аффинной связности называется геодезической, если всякий вектор ξ_0^i ($\neq 0$), касательный к этой кривой в какой-нибудь ее точке M_0, остается к ней касательным при параллельном перенесении вдоль нее.

Пусть геодезическая задана уравнениями

$$x^i = x^i(t), \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

где $x^i(t)$ — по крайней мере дважды непрерывно дифференцируемые функции, и пусть параллельно переносимый касательный вектор вдоль геодезической будет $\xi^i(t)$. В силу коллинеарности касательных векторов в каждой точке кривой можно написать:

$$\frac{dx^i}{dt} = \alpha \xi^i, \tag{90.1}$$

где $\alpha = \alpha(t)$ зависит от точки на кривой и нигде не обращается в нуль, так как иначе $\frac{dx^i}{dt}$ обращались бы в нуль одновременно, что мы исключаем. При желании всегда можно перейти к такому параметру τ вдоль геодезической, чтобы коэффициент α