Далее, если в начальной точке $\zeta_0^i = \xi_0^i + \eta_0^i$, то в процессе параллельного перенесения этих трех векторов сохраняется зависимость

$$\zeta^i(t) = \xi^i(t) + \eta^i(t). \tag{89.20}$$

В самом деле, складывая почленно (89.18) и (89.19), убеждаемся, что вектор $\xi^i + \eta^i$ тоже удовлетворяет формуле параллельного перенесения и, следовательно, переносится параллельно вместе с $\xi^i$ и $\eta^i$. Поскольку вектор $\zeta^i$ тоже переносится параллельно, то равенство между $\zeta^i$ и $\xi^i + \eta^i$, имеющее место в начальной точке, сохраняется все время, и мы приходим к (89.20).

Так как все линейные зависимости между векторами сводятся к рассмотренным простейшим (89.17) и (89.20), то все они сохраняются при параллельном перенесении.

## § 90. Геодезические линии в $L_n$

*Геодезические линии* в пространстве аффинной связности играют приблизительно такую же роль, как прямые линии в аффинном пространстве. Именно, они обладают тем же основным свойством — *постоянством направления*. Для прямых линий это свойство выражается в том, что вектор, направленный по данной прямой линии в какой-нибудь ее точке, будет направлен по ней и в любой другой ее точке. Аналогично этому мы формулируем определение геодезической линии.

*Кривая в пространстве аффинной связности называется геодезической, если всякий вектор $\xi_0^i$ ($\neq 0$), касательный к этой кривой в какой-нибудь ее точке $M_0$, остается к ней касательным при параллельном перенесении вдоль нее.*

Пусть геодезическая задана уравнениями

$$x^i = x^i(t), \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

где $x^i(t)$ — по крайней мере дважды непрерывно дифференцируемые функции, и пусть параллельно переносимый касательный вектор вдоль геодезической будет $\xi^i(t)$. В силу коллинеарности касательных векторов в каждой точке кривой можно написать:

$$\frac{dx^i}{dt} = \alpha \xi^i, \tag{90.1}$$

где $\alpha = \alpha(t)$ зависит от точки на кривой и нигде не обращается в нуль, так как иначе $\frac{dx^i}{dt}$ обращались бы в нуль одновременно, что мы исключаем. При желании всегда можно перейти к такому параметру $\tau$ вдоль геодезической, чтобы коэффициент $\alpha$

тождественно равнялся единице. Для этого достаточно положить:

$$\tau=\int\alpha(t)\,dt,\ \text{ так что }\ d\tau=\alpha(t)\,dt,\tag{90.2}$$

после чего (90.1) принимает вид:

$$\frac{dx^i}{d\tau}=\xi^i.\tag{90.3}$$

*Параметр $\tau$ на геодезической, для которого $\frac{dx^i}{d\tau}$ есть параллельно переносимый касательный вектор, мы будем называть каноническим параметром.* Как мы показали, переход к каноническому параметру всегда возможен. При этом канонический параметр выбирается с точностью до произвольного линейного преобразования с постоянными коэффициентами

$$\tau^*=A\tau+B,\quad A\neq 0.\tag{90.4}$$

Действительно, если $\tau$ — канонический параметр, то и $\tau^*$ тоже, так как

$$d\tau^*=A\,d\tau,\quad \frac{dx^i}{d\tau^*}=\frac{1}{A}\frac{dx^i}{d\tau}\quad\left(\frac{1}{A}=\text{const}\right)$$

и вектор $\frac{dx^i}{d\tau^*}$ будет вместе с $\frac{dx^i}{d\tau}$ *параллельно переносимым* касательным вектором.

С другой стороны, *формула* (90.4) *исчерпывает все возможные способы выбора канонического параметра.* В самом деле, если $\tau$ и $\tau^*$ — два канонических параметра, то векторы $\frac{dx^i}{d\tau}$, $\frac{dx^i}{d\tau^*}$ оба параллельно переносятся вдоль кривой, а следовательно, в равенстве

$$\frac{dx^i}{d\tau}=\frac{dx^i}{d\tau^*}\frac{d\tau^*}{d\tau}$$

коэффициент $\frac{d\tau^*}{d\tau}$ должен быть постоянным (линейные зависимости между параллельно переносимыми векторами сохраняются). Отсюда следует, что зависимость $\tau^*$ от $\tau$ обязательно будет линейной.

Мы дали определение геодезических линий, но не знаем еще, существуют ли они, с каким произволом их можно выбирать и как фактически их строить. На эти вопросы дают ответ *дифференциальные уравнения геодезических линий.*

Будем искать параметрические уравнения геодезических линий с каноническим параметром $\tau$:

$$x^i=x^i(\tau).\tag{90.5}$$

*Запишем требование, чтобы вектор $\frac{dx^i}{d\tau}$ параллельно переносился вдоль искомой кривой; это будет означать одновременно, что кривая геодезическая и что параметр $\tau$ на ней канонический.*

Применяя формулу параллельного перенесения (89.12) к вектору $\frac{dx^i}{d\tau}$, получаем:

$$d\,\frac{dx^k}{d\tau} = -\Gamma^k_{ij}\frac{dx^j}{d\tau}dx^i$$

и, деля на $d\tau$, приходим к дифференциальным уравнениям геодезических

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2} = -\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}, \tag{90.6}$$

отнесенных к каноническому параметру.

Как было уже сказано, $x^k(\tau)$ мы рассматриваем как неизвестные функции. Вторая производная каждой неизвестной функции $x^k(\tau)$ выражена здесь через сами неизвестные функции (входящие как аргументы под знак $\Gamma^k_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$) и через их первые производные. Мы имеем здесь, таким образом, частный случай канонической системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Как известно, решение такой системы единственным образом определяется заданием начальных значений неизвестных функций и всех их производных порядка более низкого, чем порядок старших производных, выраженных в дифференциальных уравнениях. При этом необходимо сделать определенные предположения относительно гладкости функций, входящих в правые части уравнений; в нашем случае эти предположения вполне покрываются непрерывной дифференцируемостью функций $\Gamma^k_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$. В соответствии со сказанным мы можем произвольно задаться начальными значениями неизвестных функций $x^k$ и их первых производных $\frac{dx^k}{d\tau}$ при каком-либо начальном значении параметра:

$$(x^i)_{\tau=\tau_0} = a^i, \quad \left(\frac{dx^i}{d\tau}\right)_{\tau=\tau_0} = b^i, \tag{90.7}$$

где $b^i$ одновременно в нуль не обращаются. Тогда по общей теореме существования мы можем утверждать, что *в некоторой окрестности значения* $\tau = \tau_0$ *существуют и единственным образом определяются функции* $x^i(\tau)$, *удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений* (90.6) *и начальным условиям* (90.7).

Полученное решение, таким образом, зависит от начальных условий и в развернутом виде записывается:

$$x^i = x^i(\tau;\ a^1, \ldots, a^n;\ b^1, \ldots, b^n), \tag{90.8}$$

причем, как доказывается в теории дифференциальных уравнений, эти функции по всем своим аргументам будут непрерывно дифференцируемыми такое же число раз, как и функции $\Gamma(x^1, \ldots, x^n)$, а по аргументу $\tau$ — даже на 2 единицы выше. В переводе на геометрический язык наш результат означает, что всегда можно провести геодезическую линию и притом только одну через наперед заданную точку $A(a^i)$ и с наперед заданным касательным вектором $b^i$ в этой точке. Заметим, что существенно при этом задание не самого касательного вектора $b^i$, а лишь касательной прямой, по которой он направлен. В самом деле, если $b^i$ заменить любым коллинеарным вектором, например, $-5b^i$, то *геодезическая от этого не изменится*: достаточно на прежней геодезической взять вместо канонического параметра $\tau$ другой канонический параметр $\tau^* = -\frac{1}{5}\tau$. Тогда в прежней начальной точке

$$\frac{dx^i}{d\tau^*} = -5\frac{dx^i}{d\tau} = -5b^i.$$

Точно так же полученная геодезическая не зависит от начального значения $\tau_0$ параметра $\tau$, так как, не меняя самой кривой, можно принять на ней за канонический параметр $\tau + C$, где $C$ — любая константа. Тогда начальное значение $\tau_0 + C$ может быть сделано каким угодно.

Мы видим, что произвол в выборе геодезических в пространстве аффинной связности такой же, как и произвол в выборе прямых в аффинном пространстве: *через каждую точку по каждому направлению проходит одна и только одна геодезическая.*

В случае аффинного пространства $A_n$ *прямые линии являются геодезическими,* как сразу видно из определения геодезических. Теперь мы можем утверждать и обратное: *всякая геодезическая в $A_n$ является прямой линией.* Действительно, через данную точку по данному направлению проходит лишь одна геодезическая, которая должна, таким образом, совпадать с прямой линией, проведенной через ту же точку по тому же направлению.

Возвращаемся к произвольному $L_n$.

Общая теорема существования гарантирует нам существование функций $x^i(\tau)$ лишь в некоторой окрестности данного значения $\tau = \tau_0$, т. е. существование лишь некоторого кусочка геодезической около данной точки $A(a^i)$. После небольшого дополнительного рассуждения мы сможем утверждать больше. А именно, обозначим через $\tau_1 > \tau_0$ такое значение $\tau$, что: 1) при $\tau$, меняющемся между $\tau_0$ и $\tau_1$ ($\tau_0 \leqslant \tau < \tau_1$), функции $x^i(\tau)$, удовлетворяющие (90.6), (90.7), существуют, но 2) при $\tau$, меняющемся от $\tau_0$ до $\tau_1 + \delta$, они уже не существуют, сколь бы малым ни брать $\delta > 0$. При этом мы допускаем случай $\tau_1 = \infty$; тогда, конечно, последнее требование 2) излишне и даже не имеет смысла. Другими словами, $\tau_1$ — верхняя грань всех тех значений канонического параметра $\tau$, которые можно достичь, продолжая нашу геодезическую столько, сколько это возможно.

Итак, меняя $\tau$ в сторону возрастания, начиная от $\tau_0$, мы неограниченно приближаемся к $\tau_1$, но не превосходим этого значения.

Как сейчас будет показано, мы даже не достигаем значения $\tau_1$; более того, при $\tau \to \tau_1$ (имеется в виду непрерывное изменение $\tau$) *точка $M(\tau)$ на геодезической не может стремиться к какому-либо предельному положению $M_1$*. В самом деле, допустим противное:

$$M(\tau) \underset{\tau \to \tau_1}{\longrightarrow} M_1. \tag{90.9}$$

Окружим $M_1$ очень малой окрестностью $U$, так что заключенные в ней маленькие кусочки геодезических будут иметь, грубо говоря, почти линейные уравнения $x^i \approx a^i\tau + b^i$ и будут вести себя почти как кусочки прямых (если координаты $x^i$ представить себе на минуту как аффинные координаты в аффинном пространстве). Ясно, что те геодезические отрезочки в $U$, которые не проходят через точку $M_1$, не могут к ней и неограниченно приближаться (это нетрудно было бы показать и с полной строгостью). Наша геодезическая в силу (90.9) войдет в окрестность $U$ и будет в ней оставаться, начиная с некоторого значения $\tau$. Следовательно, она должна в этой части совпасть с одним из геодезических отрезочков, заключенных в окрестности $U$, а именно с одним из отрезочков, проходящих через $M_1$, — иначе (90.9) не могло бы иметь места. Но тем самым наша геодезическая не только дойдет до точки $M_1$, но и пройдет через нее, а значит, параметр $\tau$ не только достигнет значения $\tau_1$, но и превзойдет его, а это невозможно.

Наше предложение доказано. Смысл его в том, что, продолжая геодезическую, мы не можем вдруг остановиться, упереться в некоторую точку; если даже возрастание канонического параметра ограничено значением $\tau_1 < \infty$, геодезическая в пределах нашего пространства продолжается неограниченно. Этому не противоречит такое, например, положение вещей: пусть наше пространство представляет собой ограниченную область $\Omega$ аффинного пространства $A_n$. Тогда при продолжении геодезических линий (т. е. прямых) мы часто будем останавливаться, упираясь в границу области $\Omega$. Однако граница области $\Omega$ не принадлежит рассматриваемому многообразию, и с точки зрения самой области $\Omega$ геодезическая продолжается неограниченно (см. определение области; § 75).

Мы все время говорим о продолжении геодезических линий; при этом важно, что *продолжать геодезическую можно лишь одним способом*. В самом деле, допустим, что геодезическая линия при ее продолжении с некоторого момента раздваивается; пусть при этом $\tau^*$ — верхняя грань значений $\tau \geqslant \tau_0$, при которых обе геодезические еще совпадают. Тогда они будут совпадать и при значении $\tau = \tau^*$, так как в обоих случаях

$$M(\tau) \to M(\tau^*) \text{ при } \tau \to \tau^* \quad (\tau_0 \leqslant \tau < \tau^*),$$

где точки $M(\tau)$ — общие для обеих геодезических; действительно, в силу условия 4° (§ 84) $M(\tau)$ при $\tau \to \tau^*$ не может стремиться одновременно к двум различным предельным точкам $M_1(\tau^*)$, $M_2(\tau^*)$. Исходя теперь из точки $M(\tau^*)$, можно продолжить общий отрезок $\tau_0 \leqslant \tau \leqslant \tau^*$ двух геодезических линий и на значения $\tau > \tau^*$ (вблизи $\tau^*$), и притом единственным образом по уже использованной теореме существования и единственности. Мы вступаем в противоречие с определением $\tau^*$, и этим доказывается наше утверждение.

Пространство аффинной связности $L_n$ называется *полным*, если на любой его геодезической канонический параметр $\tau$ можно менять от $-\infty$ до $+\infty$. Таково, например, аффинное пространство $A_n$.

Рассмотрим еще некоторые свойства геодезических. *Если в пространствах аффинной связности нас интересуют лишь их геодезические, то мы можем ограничиться пространствами без кручения. А именно объект связности $\Gamma^k_{ij}$ определяет в данном многообразии те же геодезические, что и объект связности без кручения $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$, полученный его симметрированием:*

$$\tilde{\Gamma}^k_{ij} = \frac{1}{2}(\Gamma^k_{ij} + \Gamma^k_{ji}).$$

Убедимся прежде всего, что $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$, таким образом полученные, действительно образуют объект связности. Для этого достаточно почленно сложить и разделить на 2 формулы преобразования (89.1) и (89.10). Заменяя как в старых, так и в новых координатах полусумму $\Gamma^k_{ij}$ и $\Gamma^k_{ji}$ через $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$, получаем для $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$ закон преобразования вида (89.1), а это означает, что $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$ — тоже объект связности. Очевидно, эта связность без кручения, так как $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$ симметричен по нижним индексам.

Теперь покажем, что геодезические для обеих связностей будут общие. Пишем дифференциальные уравнения геодезических для связности $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$:

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2} = -\tilde{\Gamma}^k_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau} = -\frac{1}{2}\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau} - \frac{1}{2}\Gamma^k_{ji}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}.$$

Меняя обозначения индексов суммирования во втором члене правой части ($i$ на $j$ и наоборот), убеждаемся, что он равен первому члену, в результате в правой части остается удвоенный первый член, и мы получаем: $\frac{d^2x^k}{d\tau^2} = -\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}$, а это есть дифференциальные уравнения геодезических связности $\Gamma^k_{ij}$.

Таким образом, геодезические для обеих связностей действительно общие.

Будем рассматривать теперь *геодезические для связностей без кручения.* Поставим следующую задачу. *Пусть в многообразии заданы две связности без кручения* $\Gamma^k_{ij}$, $G^k_{ij}$; *в каком случае они имеют общие геодезические?*

Допустим, что нам *дано, что геодезические у обеих связностей общие.* Рассмотрим для какой-либо геодезической касательный вектор $\xi^i$, параллельно переносимый в первой связности, и касательный вектор $\eta^i$, параллельно переносимый во второй связности. Так как оба вектора касательные, то

$$\eta^k = \alpha\xi^k, \tag{90.10}$$

где коэффициент $\alpha$, вообще говоря, переменный; $\alpha \neq 0$. Запишем формулы параллельного перенесения:

$$d\xi^k = -\Gamma^k_{ij}\xi^j\,dx^i, \tag{90.11}$$

$$d\eta^k = -G^k_{ij}\eta^j\,dx^i. \tag{90.12}$$

Вставляя в последнюю формулу $\eta^k$ из (90.10), получим:

$$d\alpha\,\xi^k + \alpha\,d\xi^k = -G^k_{ij}\alpha\xi^j\,dx^i.$$

Деля почленно на $\alpha$ и вставляя сюда $d\xi^k$ из (90.11), получим:

$$\frac{d\alpha}{\alpha}\xi^k - \Gamma^k_{ij}\xi^j\,dx^i = -G^k_{ij}\xi^j\,dx^i. \tag{90.13}$$

Параллельно переносимый касательный вектор $\xi^i$ согласно (90.3) можно записать: $\xi^i = \frac{dx^i}{d\tau}$, где $\tau$ — канонический параметр по отношению к первой связности. Тогда (90.13) после почленного деления на $d\tau$ принимает вид

$$\frac{d\ln\alpha}{d\tau}\xi^k = \left(\Gamma^k_{ij} - G^k_{ij}\right)\xi^j\xi^i. \tag{90.14}$$

Так как геодезические линии можно проводить через любую точку по любому направлению, то это равенство *должно быть верно в любой точке и для любого вектора* $\xi^i$. При этом $\frac{d\ln\alpha}{d\tau}$ имеет, конечно, каждый раз свое численное значение, которое зависит от выбора точки и вектора $\xi^i$.

Обозначим для краткости

$$\Gamma^k_{ij} - G^k_{ij} = T^k_{ij}. \tag{90.15}$$

Отметим, что составленная таким образом *разность двух объектов связности дает всегда тензор, один раз контравариантный и дважды* *ковариантный*. Это легко проверить, выписав закон преобразования (89.1) для $\Gamma^k_{ij}$ и параллельно для $G^k_{ij}$ и вычитая почленно из первого равенства второе. Тогда члены со вторыми производными взаимно уничтожаются, и для разностей $T^k_{ij}$ мы получаем тензорный закон преобразования. Это верно, разумеется, для любых связностей $\Gamma^k_{ij}$, $G^k_{ij}$ в том числе и с кручением. В нашем случае связности без кручения; отсюда следует $T^k_{ij}=T^k_{ji}$. Теперь (90.14) можно переписать:

$$T^k_{ij}\xi^i\xi^j=\frac{d\ln\alpha}{d\tau}\xi^k. \qquad (90.16)$$

Из этого соотношения мы должны сделать выводы относительно строения тензора $T^k_{ij}$.

Для этой цели исключим неизвестный нам множитель $\frac{d\ln\alpha}{d\tau}$ следующим образом: умножаем (90.16) почленно на $\xi^l$ и альтернируем по индексам $k$ и $l$. Получим:

$$\xi^{[l}T^{k]}_{ij}\xi^i\xi^j=0. \qquad (90.17)$$

Пользуясь единичным тензором $\delta^l_m$, можно записать тождество

$$\xi^l=\delta^l_m\xi^m.$$

Вставляя это выражение в (90.17), получим:

$$\delta^{[l}_m T^{k]}_{ij}\xi^m\xi^i\xi^j=0. \qquad (90.18)$$

Так как это равенство должно иметь место *тождественно* относительно $\xi^1, \ldots, \xi^n$, то после приведения подобных членов все коэффициенты кубичной формы в левой части должны обратиться в нуль. Член с произведением $\xi^p\xi^q\xi^r$ будет встречаться при суммировании по $m$, $i$, $j$ шесть раз (если $p$, $q$, $r$ все различны), именно, когда $m$, $i$, $j$ принимают значения $p$, $q$, $r$ в их всевозможных перестановках. Соответствующий суммарный коэффициент при $\xi^p\xi^q\xi^r$, который мы должны приравнять нулю, легко вычисляется из (90.18):

$$2\left(\delta^{[l}_p T^{k]}_{qr}+\delta^{[l}_q T^{k]}_{rp}+\delta^{[l}_r T^{k]}_{pq}\right)=0. \qquad (90.19)$$

Ввиду симметрии $T^k_{ij}$ по нижним индексам среди шести коэффициентов будут три пары одинаковых. Аналогичным подсчетом соотношение (90.19) получается и при наличии среди $p$, $q$, $r$ одинаковых индексов.

Запишем альтернацию в (90.19) в развернутом виде:

$$\delta^l_p T^k_{qr}+\delta^l_q T^k_{rp}+\delta^l_r T^k_{pq}-\delta^k_p T^l_{qr}-\delta^k_q T^l_{rp}-\delta^k_r T^l_{pq}=0.$$

Произведем теперь свертывание по индексам $l$, $r$. Учитывая свойства тензора $\delta^i_j$, в частности, что

$$\delta^l_l = \delta^1_1 + \delta^2_2 + \ldots + \delta^n_n = n,$$

получим:

$$T^k_{qp} + T^k_{qp} + nT^k_{pq} - \delta^k_p T^l_{ql} - \delta^k_q T^l_{lp} - T^k_{pq} = 0,$$

откуда

$$T^k_{pq} = \frac{1}{n+1}\left(\delta^k_p T^l_{ql} + \delta^k_q T^l_{pl}\right). \tag{90.20}$$

Обозначим через $p_i$ одноковариантный тензор, полученный свертыванием тензора $T^k_{ij}$ и последующим умножением на $\frac{2}{n+1}$:

$$p_i = \frac{2}{n+1} T^l_{il}. \tag{90.21}$$

Теперь (90.20) можно записать окончательно:

$$T^k_{ij} = \frac{1}{2}\left(p_i \delta^k_j + p_j \delta^k_i\right), \tag{90.22}$$

т. е.

$$T^k_{ij} = p_{(i}\delta^k_{j)}. \tag{90.23}$$

Мы выяснили строение тензора $T^k_{ij}$. Формулируем теперь теорему, которая является ответом на поставленный нами вопрос.

*Для того чтобы два объекта связности без кручения обладали общими геодезическими, необходимо и достаточно, чтобы они отличались на тензор вида*

$$T^k_{ij} = p_{(i}\delta^k_{j)}.$$

Правда, нами доказана лишь необходимость этого признака. Но достаточность его проверяется легко. Пусть нам дано, что

$$G^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \frac{1}{2}\left(p_i \delta^k_j + p_j \delta^k_i\right), \tag{90.24}$$

где $p_i$ — некоторое тензорное поле. Пусть дана какая-нибудь линия, геодезическая в связности $\Gamma^k_{ij}$, с каноническим параметром $\tau$ и с параллельно переносимым касательным вектором $\xi^i$. Покажем, что, подобрав некоторый (переменный) множитель $\alpha$, мы можем добиться, чтобы вектор $\eta^i = \alpha\xi^i$ *оказался параллельно переносимым уже в связности* $G^k_{ij}$. Тем самым будет показано, что наша геодезическая будет геодезической и в связности $G^k_{ij}$. Записывая, что $\xi^k$ переносится параллельно в связности $\Gamma^k_{ij}$, получим снова (90.11). Требуем, далее, чтобы $\eta^k = \alpha\xi^k$ переносился параллельно в связности $G^k_{ij}$: записываем (90.12) и после прежних преобразований получаем (90.14). Пользуясь (90.24), вставляем сюда $\frac{1}{2}(p_i\delta_j^k + p_j\delta_i^k)$ вместо $\Gamma_{ij}^k - G_{ij}^k$ и получаем:

$$\frac{d \ln \alpha}{d\tau}\xi^k = p_i \xi^i \xi^k,$$

т. е. наше требование принимает вид

$$\frac{d \ln \alpha}{d\tau} = p_i \xi^i.$$

Так как вдоль нашей кривой $p_i\xi^i$ есть вполне определенная функция параметра $\tau$, то отсюда после интегрирования найдем $\ln \alpha$ с точностью до постоянного слагаемого, а само $\alpha$ — с точностью до постоянного множителя. Тем самым найден и вектор $\eta^i = \alpha\xi^i$, и всякая геодезическая в связности $\Gamma_{ij}^k$ оказывается геодезической и в связности $G_{ij}^k$. Теорема доказана.

*Заметим, что если бы мы потребовали для двух связностей без кручения совпадения не только геодезических, но и канонических параметров на них, то и сами связности совпали бы.* Действительно вдоль общей геодезической и для общего канонического параметра $\tau$ удовлетворяются дифференциальные уравнения

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2} = -\Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}, \quad \frac{d^2x^k}{d\tau^2} = -G_{ij}^k \frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau},$$

откуда

$$\Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau} = G_{ij}^k \frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau},$$

а так как геодезические линии проходят через любую точку по любому направлению, то здесь мы имеем тождество относительно $x^i$ и $\frac{dx^i}{d\tau}$. Из него следует (учитывая симметрию $\Gamma_{ij}^k$ и $G_{ij}^k$ по нижним индексам):

$$\Gamma_{ij}^k = G_{ij}^k. \tag{90.25}$$

Наше утверждение доказано.

Добавление к какому-либо объекту связности любого тензора вида (90.23) называется *геодезическим преобразованием аффинной связности*; геодезические при этом не меняются.

Пространство аффинной связности $L_n^0$ с объектом связности $\Gamma_{jk}^i (= \Gamma_{kj}^i)$ называется *проективно евклидовым*, если в некоторой окрестности каждой его точки можно перейти в такую координатную систему $x^i$, в которой геодезические линии задаются линейными параметрическими уравнениями

$$x^i = a^i t + b^i \qquad (a^i,\ b^i = \text{const}). \tag{90.26}$$

Это значит, что они ведут себя как геодезические аффинного (или евклидова) пространства в аффинных координатах, т. е. как прямые линии.

Тем самым геодезические линии, определяемые нашим объектом связности $\Gamma^i_{jk}$, определяются и объектом связности $G^i_{jk}$ аффинного пространства, а следовательно, согласно (90.24)

$$G^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - p_{(i}\delta^k_{j)}, \tag{90.27}$$

где $p_i$ — некоторое тензорное поле (все это в пределах рассматриваемой окрестности).

Чтобы $L_n^0$ с объектом связности $\Gamma^k_{ij}$ было проективно евклидовым, необходимо и достаточно существование в пределах некоторой окрестности любой его точки такого тензорного поля $p_i$, что $\Gamma^k_{ij} - \delta^k_{(i}p_{j)}$ можно было бы отождествить с объектом связности $G^k_{ij}$ в некоторой области аффинного пространства.

Необходимость этого признака только что была показана: достаточность же обнаруживается переходом к аффинным координатам в аффинном пространстве, после чего уравнения геодезических (общих для обеих связностей) можно записать, очевидно, в виде (90.26).

## § 91. Геодезические координаты в пространствах аффинной связности без кручения $L_n^0$

Среди пространств аффинной связности имеют наибольшее значение и обладают наилучшими геометрическими свойствами пространства без кручения, для которых

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}. \tag{91.1}$$

Их мы сейчас и будем рассматривать. Важность их основывается прежде всего на том, что к их числу принадлежит аффинное пространство. Действительно, мы видели (§§ 77, 78), что объект связности аффинного пространства симметричен по нижним индексам. Кроме того, аффинное пространство (или, более общо, область $\Omega$ в аффинном пространстве) можно рассматривать как частный случай пространства аффинной связности, так как вся аффинная геометрия области $\Omega$ вполне определяется заданием в ней объекта связности (§ 78). Таким образом, *область в аффинном пространстве есть частный случай пространства аффинной связности без кручения.*

Возникает вопрос, как узнать, не является ли данное пространство аффинной связности просто некоторой областью аффинного