Это значит, что они ведут себя как геодезические аффинного (или евклидова) пространства в аффинных координатах, т. е. как прямые линии.

Тем самым геодезические линии, определяемые нашим объектом связности Γ^i_{jk}, определяются и объектом связности G^i_{jk} аффинного пространства, а следовательно, согласно (90.24)

$$G^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - p_{(i}\delta^k_{j)}, \tag{90.27}$$

где p_i — некоторое тензорное поле (все это в пределах рассматриваемой окрестности).

Чтобы L_n^0 с объектом связности Γ^k_{ij} было проективно евклидовым, необходимо и достаточно существование в пределах некоторой окрестности любой его точки такого тензорного поля p_i, что $\Gamma^k_{ij} - \delta^k_{(i}p_{j)}$ можно было бы отождествить с объектом связности G^k_{ij} в некоторой области аффинного пространства.

Необходимость этого признака только что была показана: достаточность же обнаруживается переходом к аффинным координатам в аффинном пространстве, после чего уравнения геодезических (общих для обеих связностей) можно записать, очевидно, в виде (90.26).

§ 91. Геодезические координаты в пространствах аффинной связности без кручения L_n^0

Среди пространств аффинной связности имеют наибольшее значение и обладают наилучшими геометрическими свойствами пространства без кручения, для которых

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}. \tag{91.1}$$

Их мы сейчас и будем рассматривать. Важность их основывается прежде всего на том, что к их числу принадлежит аффинное пространство. Действительно, мы видели (§§ 77, 78), что объект связности аффинного пространства симметричен по нижним индексам. Кроме того, аффинное пространство (или, более общо, область Ω в аффинном пространстве) можно рассматривать как частный случай пространства аффинной связности, так как вся аффинная геометрия области Ω вполне определяется заданием в ней объекта связности (§ 78). Таким образом, *область в аффинном пространстве есть частный случай пространства аффинной связности без кручения.*

Возникает вопрос, как узнать, не является ли данное пространство аффинной связности просто некоторой областью аффинного пространства (которая, в частности, может заполнять и все пространство). Прежде всего при этом имеет смысл рассматривать лишь пространства без кручения — для пространств с кручением вопрос сразу решается отрицательно. Затем вопрос сводится к такому: *можно ли перейти в такую координатную систему* $x^{i'}$, *действующую во всем пространстве, в которой все коэффициенты связности* $\Gamma^{k'}_{i'j'}$ *тождественно обращаются в нуль.*

В самом деле, мы знаем, что коэффициенты связности аффинного пространства равны нулю в аффинных координатах и только в них. Поэтому если в пространстве аффинной связности $\overset{0}{L}_n$, отнесенном к координатной системе $x^{i'}$ с областью изменения координат Ω', оказывается

$$\Gamma^{k'}_{i'j'} = 0, \tag{91.2}$$

то мы вправе отождествить это пространство с куском аффинного пространства, заданным в аффинных координатах $x^{i'}$ в пределах той же области изменения Ω'. Действительно, коэффициенты связности $\Gamma^{k'}_{i'j'}$ в обоих случаях одинаковы (равны нулю), а следовательно, одинакова и геометрия, определяемая объектом связности.

В некоторых случаях нельзя, может быть, добиться обращения в нуль $\Gamma^{k'}_{i'j'}$ во всем пространстве одновременно, но можно это сделать в некоторой окрестности каждой его точки. Тогда пространство аффинной связности мы называем *локально аффинным* (аналогично локально евклидову; § 86). В некоторой окрестности любой своей точки локально аффинное пространство представляет собой «кусок аффинного пространства» и лишь в целом отличается от него.

Возвращаемся к общей теории. Вообще говоря, пространство аффинной связности, даже с нулевым кручением, аффинным пространством не является, и ни в какой координатной системе $x^{i'}$, хотя бы в пределах малой окрестности данной точки M, $\Gamma^{k'}_{i'j'}$ не удается обратить в нуль тождественно.

Однако в случае нулевого кручения без труда можно обратить $\Gamma^{k'}_{i'j'}$ *в нуль в самой данной точке* M. В самом деле, переходя от координат x^k к координатам $x^{k'}$, зададимся значениями $\dfrac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}$ в данной точке M произвольно (разумеется, матрица должна быть неособенной), а значения $\dfrac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^i \partial x^j}$ в той же точке подберем так, чтобы $\Gamma^{k'}_{i'j'}(M)$ обратились в нуль. Для этого, как видно, из (89.1), достаточно потребовать:

$$\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \Gamma^k_{ij} = 0. \tag{91.3}$$

Все величины предполагаются вычисленными в данной точке M. Можно взять вместо (91.3) равносильное соотношение

$$\Gamma_{ij}^{k}\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^{k}}=\frac{\partial^2 x^{l'}}{\partial x^{i}\partial x^{j}}, \tag{91.4}$$

используя закон преобразования (89.1) в форме (89.8)

Таким образом, переходя от координат x^i к координатам $x^{i'}$, мы можем добиться обращения $\Gamma_{i'j'}^{k'}$ в нуль в наперед заданной точке M. Для этого достаточно подобрать функции $x^{i'}(x^1, \ldots, x^n)$ так, чтобы их вторые частные производные в точке M выражались через их первые частные производные и Γ_{ij}^{k} в той же точке M согласно (91.4), а это можно сделать бесчисленным количеством способов. Зададимся, например, неособенной числовой матрицей $a_i^{l'}$ и введем новые координаты $x^{l'}$ посредством формул

$$x^{l'}=a_i^{l'}(x^i-x_M^i)+\frac{1}{2}a_k^{l'}\Gamma_{ij}^{k}(M)(x^i-x_M^i)(x^j-x_M^j). \tag{91.5}$$

Здесь x_M^i, $\Gamma_{ij}^{k}(M)$ — определенные числа, так что $x^{l'}$ выражаются через x^i квадратичными многочленами. Дифференцируя (91.5) по x^i, а потом по x^j почленно и полагая $x^i=x_M^i$, получаем:

$$\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^{i}}(M)=a_i^{l'},\qquad \frac{\partial^2 x^{l'}}{\partial x^{i}\partial x^{j}}(M)=a_k^{l'}\Gamma_{ij}^{k}(M),$$

так что (91.4) соблюдается, а значит, $\Gamma_{i'j'}^{l'}=0$. Полученная координатная система $x^{i'}$ пригодна, по крайней мере, в некоторой окрестности данной точки M.

В качестве матрицы $a_i^{l'}$ можно взять и просто единичную матрицу. Точкой M можно задаваться произвольно. Однако каждый раз переход к координатам $x^{i'}$ приходится делать по-своему, и каждый раз мы получаем, что $\Gamma_{i'j'}^{k'}=0$ лишь для одной точки M. Если бы захотели указанным приемом добиться *тождественного* обращения $\Gamma_{i'j'}^{k'}$ в нуль, то нам нужно было бы обеспечить равенство (91.4) *в каждой точке* M, т. е. проинтегрировать соответствующую систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $x^{i'}(x^1, \ldots, x^n)$. Однако эта система, вообще говоря, несовместна. К этому вопросу мы вернемся в главе IX.

Напомним, что мы рассматриваем пространство без кручения. Это очень существенно, так как в случае $\Gamma_{ij}^{k}\neq\Gamma_{ji}^{k}$ вторые частные производные нельзя было бы вычислять по формуле (91.4)

Если в данных координатах $x^{i'}$ в данной точке M имеет место $\Gamma_{i'j'}^{k'}(M)=0$, то координаты $x^{i'}$ называются геодезическими в точке M.

Значение геодезических координат состоит в том, что они вблизи точки M подражают аффинным координатам, насколько это возможно в нашем пространстве. Действительно, формула параллельного перенесения (89.18) в точке M и в соответствующих геодезических координатах $x^{i'}$ дает

$$d\xi^{k'} = 0.$$

Это означает, что координаты параллельно переносимого вектора $\xi^{k'}$ хоть и не являются постоянными, как в аффинных координатах, но все же являются стационарными в точке M. Точнее, это значит, что при бесконечно малом смещении из точки M по любому пути координаты параллельно переносимого вектора $\xi^{k'}$ получают приращения $\Delta\xi^{k'}$ бесконечно малые высшего порядка (ввиду $d\xi^{k'} = 0$). В остальных точках пространства координаты $x^{i'}$, геодезические в точке M, никакими преимуществами не обладают.

Заметим, что линейное преобразование геодезических координат

$$x^{i''} = A^{i''}_{i'} x^{i'} + A^{i''}$$

оставляет их геодезическими в данной точке. Действительно, так как в этом случае $\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^{j''} \partial x^{k''}} = 0$, то закон преобразования $\Gamma^{i'}_{j'k'}$ принимает тензорный характер $\Gamma^{i''}_{j''k''} = A^{i''}_{i'} A^{j'}_{j''} A^{k'}_{k''} \Gamma^{i'}_{j'k'}$, и из $\Gamma^{i'}_{j'k'}(M) = 0$ следует $\Gamma^{i''}_{j''k''}(M) = 0$.

Итак, если пространство без кручения, то для каждой точки M можно построить координаты $x^{i'}$, геодезические в этой точке.

Этот результат можно значительно усилить: *преобразованием координат x^i можно добиться обращения Γ^k_{ij} в нуль не только в любой наперед заданной точке, но и вдоль любой наперед заданной кривой C.* Кривая C предполагается несамопересекающейся; координаты x^i задаются в некоторой окрестности этой кривой *).

Предварительным преобразованием координат всегда можно добиться, чтобы наша кривая оказалась некоторым отрезком координатной линии x^1, т. е. чтобы $x^2, \ldots, x^n$ вдоль нее оставались постоянными. Для простоты всегда можно принять, ничего не теряя в общности, что вдоль кривой

$$x^2 = \ldots = x^n = 0, \quad 0 \leqslant x^1 \leqslant 1. \tag{91.6}$$

Предположим, что нам удалось перейти к искомым новым координатам $x^{i'}$, так что вдоль нашей кривой $\Gamma^{k'}_{i'j'} = 0$. Тем самым в каждой точке нашей кривой должно соблюдаться соотношение (91.4).

*) Конец этого параграфа можно опустить без ущерба для понимания дальнейшего.

Вдоль нашей кривой значения $\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$ будут функциями от x^1, что мы обозначим так:

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} = a_i^{i'}(x^1). \tag{91.7}$$

Тогда (91.4) дает

$$\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i \partial x^j} = \Gamma_{ij}^k(x^1)\, a_k^{i'}(x^1), \tag{91.8}$$

где Γ_{ij}^k вдоль нашей кривой тоже являются функциями x^1. Отсюда легко вытекает, что функции $a_i^{i'}(x^1)$ не могут быть произвольными: дифференцируя (91.7) по x^1 почленно и сравнивая с (91.8) при $j=1$, получим для $a_i^{i'}(x^1)$ нормальную систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{da_i^{i'}(x^1)}{dx^1} = \Gamma_{1i}^k(x^1)\, a_k^{i'}(x^1). \tag{91.9}$$

Все полученные до сих пор соотношения лишь необходимы, так как мы рассуждали, предполагая задачу решенной. Теперь откинем это предположение и перейдем к фактическому отысканию новых координат $x^{i'}$. Для этой цели интегрируем систему (91.9), произвольно задавшись начальными значениями $a_i^{i'}(0)$ функций $a_i^{i'}(x^1)$ при условии неособенности матрицы $a_i^{i'}(0)$. Как известно, решение $a_i^{i'}(x^1)$ в этом случае существует (причем матрица $a_i^{i'}(x^1)$ остается неособенной).

Далее, напишем соотношение (91.7) при $i=1$

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^1} = a_1^{i'}(x^1). \tag{91.10}$$

Интегрируя его при произвольных начальных значениях $x^{i'} = x^{i'}(0)$, находим $x^{i'}$ как функции от x^1 вдоль нашей кривой:

$$x^{i'} = x^{i'}(0) + \int_0^{x^1} a_1^{i'}(x^1)\, dx^1 = f^{i'}(x^1). \tag{91.11}$$

Теперь мы введем новые координаты $x^{i'}$ в окрестности нашей кривой по формулам

$$x^{i'} = f^{i'}(x^1) + a_\alpha^{i'}(x^1)\, x^\alpha + \frac{1}{2}\Gamma_{\alpha\beta}^k(x^1)\, a_k^{i'}(x^1)\, x^\alpha x^\beta. \tag{91.12}$$

Здесь α, β пробегают значения 2, 3 ..., n.

По существу мы получаем здесь новые координаты $x^{i'}$ в виде разложения в ряд Тейлора по степеням старых координат $x^2, x^3, \ldots$ $\ldots, x^n$ при каждом значении x^1, $0 \leqslant x^1 \leqslant 1$. Для простоты обрываем ряд на членах второй степени. Выражения для вторых частных производных заимствованы из (91.8).

Остается проверить, что вдоль кривой (91.6) удовлетворяются уравнения (91.4), а для этого достаточно проверить (91.7) и (91.8). Дифференцируя (91.12) по x^γ $(\gamma=2,\ 3,\ \ldots,\ n)$, имеем:

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\gamma} = a^{i'}_\gamma(x^1) + \Gamma^k_{\alpha\gamma}(x^1)\, a^{i'}_k(x^1)\, x^\alpha. \tag{91.13}$$

В последнем члене мы дифференцировали по x^γ только x^β, а потом удвоили результат, так как дифференцирование x^α дает то же самое. Так как речь идет о кривой (91.6), то $x^\alpha=0$, и

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\gamma} = a^{i'}_\gamma(x^1),$$

так что (91.7) имеет место при $i=2,\ 3,\ \ldots,\ n$. Чтобы проверить (91.7) при $i=1$, дифференцируем (91.12) по x^1 и, полагая затем $x^\alpha=0$, приходим вдоль нашей кривой к выражению

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^1} = \frac{df^{i'}(x^1)}{dx^1} = a^{i'}_1(x^1),$$

где последнее равенство следует из (91.11). Итак, (91.7) проверено полностью.

Продифференцируем (91.13) по x^δ $(\delta=2,\ 3,\ \ldots,\ n)$ почленно:

$$\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^\delta \partial x^\gamma} = \Gamma^k_{\delta\gamma}(x^1)\, a^{i'}_k(x^1),$$

и значит, (91.8) соблюдается при $i,\ j=2,\ 3,\ \ldots,\ n$. Далее, дифференцируя (91.13) по x^1 и полагая $x^\alpha=0$, имеем:

$$\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^1 \partial x^\gamma} = \frac{da^{i'}_\gamma(x^1)}{dx^1}.$$

Заменяя правую часть согласно (91.9), убеждаемся, что (91.8) соблюдается вдоль нашей кривой при $i=1$, $j=2,\ 3,\ \ldots,\ n$.

Наконец, дифференцируя (91.12) два раза по x^1 и полагая $x^\alpha=0$, получим:

$$\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^1 \partial x^1} = \frac{d^2 f^{i'}(x^1)}{\partial x^1 \partial x^1} = \frac{da^{i'}_1(x^1)}{dx^1} = \Gamma^k_{11}(x^1)\, a^{i'}_k(x^1).$$

В этой выкладке мы использовали (91.10) и (91.9). Итак, соотношение (91.8) проверено полностью. *В результате вдоль нашей кривой соблюдается и* (91.4), *и тем самым* $\Gamma^{k'}_{i'j'}=0$. *Координаты* $x^{i'}$ *со свойством* $\Gamma^{k'}_{i'j'}=0$ *вдоль данной кривой мы будем называть геодезическими вдоль этой кривой.*

Координаты $x^{i'}$, геодезические вдоль данной кривой, обладают вблизи нее свойствами как бы аффинных координат; при бесконечно малом смещении из любой точки M нашей кривой дифференциалы координат параллельно переносимого вектора $\xi^{k'}$ равны нулю, так что $\Delta\xi^{i'}$ суть бесконечно малые высшего порядка. Таким образом, при параллельном перенесении вектора в бесконечной близости нашей кривой его координаты остаются «почти постоянными». Это справедливо при любом бесконечно малом смещении не только по нашей кривой, но и «вбок» от нее.

Если же, в частности, *смещение происходит вдоль самой кривой, то все время*

$$d\xi^{i'} = 0$$

и координаты параллельно переносимого вектора просто остаются постоянными:

$$\xi^{i'} = \text{const}.$$

Конечно, наш способ введения координат $x^{i'}$, геодезических вдоль данной кривой, отнюдь не является единственным; мы его выбрали лишь как наиболее простой. Результат не изменился бы, например, если бы мы в (91.12) добавили еще какие угодно многочлены с членами степени > 2 относительно $x^2, \ldots, x^n$ и с коэффициентами, зависящими от x^1.

Наше предположение, что кривая не самопересекается, существенно: иначе она содержала бы замкнутый контур, при обнесении по которому вектор $\xi^{k'}$, вообще говоря, должен был бы измениться, а потому и нельзя было бы подобрать таких координат $x^{i'}$, чтобы вдоль кривой координаты вектора $\xi^{k'}$ оставались постоянными.

Но и сейчас не исключено, что $x^{i'}$ будут принимать *одинаковые* значения в *разных* точках кривой C; в этом случае $x^{i'}$ играют роль координат лишь локально — в некоторой окрестности каждой точки кривой C.

§ 92*. Изображение кривой в L_n в виде кривой в A_n

Рассмотрим в пространстве аффинной связности L_n произвольную несамопересекающуюся кривую C

$$x^i = x^i(t), \quad a \leqslant t \leqslant b, \tag{92.1}$$

вдоль которой мы параллельно переносим всевозможные векторы

$$\xi^i = \xi^i(t), \tag{92.2}$$