

Координаты x^i , геодезические вдоль данной кривой, обладают вблизи нее свойствами как бы аффинных координат; при бесконечно малом смещении из любой точки M нашей кривой дифференциалы координат параллельно переносимого вектора $\xi^{k'}$ равны нулю, так что $\Delta \xi^{i'}$ суть бесконечно малые высшего порядка. Таким образом, при параллельном перенесении вектора в бесконечной близости нашей кривой его координаты остаются «почти постоянными». Это справедливо при любом бесконечно малом смещении не только по нашей кривой, но и «вбок» от нее.

Если же, в частности, смещение происходит вдоль самой кривой, то все время

$$d\xi^{i'} = 0$$

и координаты параллельно переносимого вектора просто остаются постоянными:

$$\xi^{i'} = \text{const.}$$

Конечно, наш способ введения координат x^i , геодезических вдоль данной кривой, отнюдь не является единственным; мы его выбрали лишь как наиболее простой. Результат не изменился бы, например, если бы мы в (91.12) добавили еще какие угодно многочлены с членами степени > 2 относительно x^2, \dots, x^n и с коэффициентами, зависящими от x^1 .

Наше предположение, что кривая не самопересекается, существенно: иначе она содержала бы замкнутый контур, при обнесении по которому вектор $\xi^{k'}$, вообще говоря, должен был бы измениться, а потому и нельзя было бы подобрать таких координат x^i , чтобы вдоль кривой координаты вектора $\xi^{k'}$ оставались постоянными.

Но и сейчас не исключено, что x^i будут принимать *одинаковые* значения в *разных* точках кривой C ; в этом случае x^i играют роль координат лишь локально — в некоторой окрестности каждой точки кривой C .

§ 92*. Изображение кривой в L_n в виде кривой в A_n

Рассмотрим в пространстве аффинной связности L_n произвольную несамопересекающуюся кривую C

$$x^i = x^i(t), \quad a \leq t \leq b, \quad (92.1)$$

вдоль которой мы параллельно переносим всевозможные векторы

$$\xi^i = \xi^i(t), \quad (92.2)$$

так что

$$d\xi^k = -\Gamma_{ij}^k \xi^j dx^i. \quad (92.3)$$

Одновременно с пространством L_n будем рассматривать аффинное пространство A_n .

Мы ставим себе следующую задачу: данную кривую C и всевозможные векторы ξ^i в каждой ее точке M изобразить кривой C^* и векторами ξ в пространстве A_n таким образом, что:

1°. Все аффинные свойства (линейные зависимости) векторов ξ^i в данной точке M сохраняются в изображении.

2°. Вектор бесконечно малого смещения dx^i вдоль кривой C изображается вектором соответствующего бесконечно малого смещения dx вдоль кривой C^* (где x — скользящий радиус-вектор кривой C^*).

3°. Параллельно переносимый вдоль C вектор $\xi^i(t)$ изображается вектором ξ , параллельно переносимым в A_n , т. е. постоянным.

Таким образом, мы хотим получить в аффинном пространстве A_n как бы модель кривой C с параллельно переносимыми вдоль нее векторами $\xi^i(t)$ и притом такую, чтобы она правильно передавала все существенные свойства оригинала (однако для C^* мы уже не требуем несамопересечения). Очевидно, что в этой модели касательные аффинные пространства в разных точках M кривой C все отождествятся с пространством A_n .

Чтобы облегчить себе задачу, выберем из бесконечного множества параллельно переносимых векторов $\xi^i(t)$ n линейно независимых векторов

$$\xi_{(1)}^i(t), \xi_{(2)}^i(t), \dots, \xi_{(n)}^i(t). \quad (92.4)$$

Тогда в силу сохранения линейных зависимостей при параллельном перенесении любой параллельно переносимый вектор $\xi^i(t)$ разлагается по векторам (92.4) с постоянными коэффициентами:

$$\xi^i(t) = \lambda^1 \xi_{(1)}^i(t) + \dots + \lambda^n \xi_{(n)}^i(t). \quad (92.5)$$

Изобразим векторы (92.4) в согласии с 3° постоянными векторами

$$e_1, e_2, \dots, e_n \quad (92.6)$$

в пространстве A_n . Эти векторы выбираются произвольно при условии их линейной независимости. Теперь любой вектор ξ^i , заданный в точке $M(t)$, будет изображаться в согласии с 1°

$$\xi = \lambda^1 e_1 + \lambda^2 e_2 + \dots + \lambda^n e_n, \quad (92.7)$$

где λ — коэффициенты разложения ξ^i по векторам $\xi_{(1)}^i(t), \dots, \xi_{(n)}^i(t)$. Очевидно, что при таком изображении все линейные зависимости между векторами ξ^i в данной точке $M(t)$ переходят и на векторы ξ . Если вектор ξ^i параллельно переносится вдоль кривой, то его изо-

бражение — вектор ξ — остается постоянным, так как согласно (92.5) коэффициенты не меняются. Применим изображение (92.7), в частности, к вектору бесконечно малого смещения dx^i в данной точке

$M(t)$. Разлагая $\frac{dx^i}{dt}$ по $\xi_{(1)}^i(t), \dots, \xi_{(n)}^i(t)$:

$$\frac{dx^i(t)}{dt} = \mu^1(t) \xi_{(1)}^i(t) + \dots + \mu^n(t) \xi_{(n)}^i(t)$$

и используя полученные коэффициенты $\mu^i(t)$ в (92.7), мы получим изображение вектора $\frac{dx^i}{dt}$, которое согласно 2° совпадает с $\frac{dx}{dt}$:

$$\frac{dx}{dt} = \mu^1(t) e_1 + \dots + \mu^n(t) e_n. \quad (92.8)$$

Интегрируя почленно, найдем радиус-вектор x как функцию от t :

$$x = x(t). \quad (92.9)$$

Это и будет параметрическое уравнение искомого кривой C^* в A_n . Из построения видно, что все поставленные требования соблюдены, и наша задача решена. Заметим, что самопересечение C^* у нас не исключается.

Искомое изображение получилось как будто со значительным произволом: произвольно выбраны линейно независимые векторы e_i , и функция $x(t)$ получилась с точностью до добавления произвольного постоянного вектора.

Но это неудивительно: заранее можно было предвидеть, что нашу модель можно подвергать любому аффинному преобразованию в A_n , так как оно не нарушает ни одного из ее свойств 1°, 2°, 3°. Но с точностью до аффинного преобразования наша модель будет единственной: если у двух моделей векторы e_1, \dots, e_n будут различными, то их можно отождествить аффинным преобразованием одной из моделей; если, далее, $x(t)$ будут отличаться на постоянный вектор, то их можно отождествить параллельным сдвигом одной из моделей. В результате наши модели совпадут.

Таким образом, решение нашей задачи с точки зрения аффинной геометрии в A_n будет единственным, т. е. все решения будут в аффинном смысле эквивалентными.

Заметим, что для случая связности без кручения мы фактически решили эту задачу уже в § 91, установив координатную систему $x^{i'}$, геодезическую вдоль данной кривой C . В координатах $x^{i'}$ вдоль кривой C мы имеем:

$$\Gamma_{i'j'}^{k'} = 0. \quad (92.10)$$

Введем в том же многообразии новую связность G_{ij}^k , такую, что в тех же координатах $x^{i'}$

$$G_{i'j'}^{k'} \equiv 0, \quad (92.11)$$

т. е. обращение $G_{i'j'}^{k'}$ в нуль происходит не только вдоль C , но и во всей области изменения $x^{i'}$. Многообразие с такой связностью можно рассматривать как аффинное пространство в аффинных координатах (вообще говоря, в пределах некоторой области).

Таким образом, кривую C можно одновременно рассматривать как кривую C^* в аффинном пространстве со связностью $G_{i'j'}^{k'}$ в аффинных координатах $x^{i'}$. Возможно, C^* самопересекается (см. конец § 91), но это мы допускаем. В силу (92.10), (92.11) оба объекта связности совпадают вдоль C , и параллельное перенесение вдоль C происходит в обоих случаях одинаково. Это можно истолковать (при желании) как отображение кривой C в аффинное пространство вместе со всеми векторами, построенными в ее точках, причем параллельное перенесение векторов вдоль C реализуется в виде их параллельного перенесения в аффинном пространстве, а это и есть решение задачи этого параграфа. Однако результат § 91 более сильный, так как там реализуется параллельное перенесение не только вдоль C , но и «вбок» от кривой C (в бесконечно малом). Зато этот результат относится только к пространствам без кручения, в то время как более слабый результат этого параграфа справедлив для всех пространств аффинной связности.

Докажем еще следующую простую теорему.

Для того чтобы кривая C была геодезической, необходимо и достаточно, чтобы ее изображение C^ было прямой линией (или ее отрезком).*

В самом деле, то, что кривая C геодезическая, равносильно существованию на ней такого параметра τ , что вектор $\xi^i = \frac{dx^i}{d\tau}$ параллельно переносится вдоль C . Но последнее равносильно тому, что соответствующий ему в изображении вектор $\xi = \frac{dx}{d\tau}$ будет параллельно переносимым вдоль C^* , т. е. постоянным:

$$\frac{dx}{d\tau} = \xi = \text{const}, \text{ или } x = \xi\tau + x_0. \quad (92.12)$$

Полученное параметрическое уравнение линии C^* означает, что это — прямая, и требуемое доказано.

Произведем в связи с этим некоторые подсчеты.

Пусть отрезок геодезической PQ изображается в виде прямолинейного отрезка P^*Q^* и пусть в точке P (и соответственно P^*) канонический параметр имеет значение нуль, а в точке Q (и соответственно Q^*) — значение τ . Обозначим далее ξ_P^i касательный вектор $\frac{dx^i}{d\tau}$ в точке P :

$$\xi_P^i = \left(\frac{dx^i}{d\tau} \right)_P, \quad (92.13)$$

а через ξ — соответствующий ему вектор в изображении. Вектор в точке P

$$\xi_P^i \tau = \left(\frac{dx^i}{d\tau} \right)_P \tau$$

мы будем называть *вектором геодезического смещения* PQ . Этот вектор зависит лишь от самого геодезического отрезка PQ и не зависит от выбора канонического параметра вдоль него. Действительно, если, например, мы умножим канонический параметр τ на 5, то вектор геодезического смещения одновременно умножится и разделится на 5.

В изображении этому вектору отвечает вектор $\xi\tau$. Как видно из (92.12),

$$x_Q^* = \xi\tau + x_0, \text{ где } x_0 = x_{P^*}, \text{ так что } \overrightarrow{P^*Q^*} = x_Q^* - x_{P^*} = \xi\tau.$$

Итак, вектору геодезического смещения PQ в оригинале отвечает вектор $\overrightarrow{P^*Q^*}$ в изображении. Беря теперь τ бесконечно малым (так что $Q \rightarrow P$, $Q^* \rightarrow P^*$), вычислим приращения координат при переходе из P в Q :

$$x_Q^k - x_P^k = \xi_P^k \tau - \frac{1}{2} \Gamma_{ij}^k \xi_P^i \xi_P^j \tau^2 + \dots \quad (92.14)$$

Мы воспользовались здесь разложением в ряд Маклорена по степеням τ с точностью 2-го порядка, причем $\left(\frac{dx^k}{d\tau} \right)_P$ мы заменили согласно (92.13), а $\left(\frac{d^2x^k}{d\tau^2} \right)_P$ — из дифференциальных уравнений геодезических. Величины Γ_{ij}^k взяты в точке P .

Соответствующее смещение $\overrightarrow{P^*Q^*}$ в изображении задается, как мы видели, вектором

$$\overrightarrow{P^*Q^*} = \xi\tau. \quad (92.15)$$

Эти результаты нам вскоре понадобятся.

У нас не было до сих пор геометрического истолкования для кручения данной аффинной связности. Сейчас мы можем его дать. Будем рассматривать изображение какой-нибудь кривой C в виде кривой C^* в аффинном пространстве. Пусть начало и конец кривой C совпадают между собой; тогда в изображении они, вообще говоря, разойдутся и кривая C^* уже не будет замкнутой.

Наоборот, когда кривая C^* окажется замкнутой, то C , вообще говоря, будет разомкнутой. Оказывается, что это нарушение замкнутости при переходе от оригинала к изображению и наоборот определяется в случае бесконечно малых контуров в основном

тензором кручения S_{ij}^k в соответствующей точке («в основном» — это значит, что речь идет о главной части того бесконечно малого зазора, который появляется в ранее замкнутом бесконечно малом контуре).

Точный смысл этого утверждения мы сейчас раскроем.

Пусть кривая C^* образует параллелограмм $P^*Q^*R^*S^*T^*$ (рис. 18), причем начальная ее точка P^* совпадает с конечной точкой T^* .

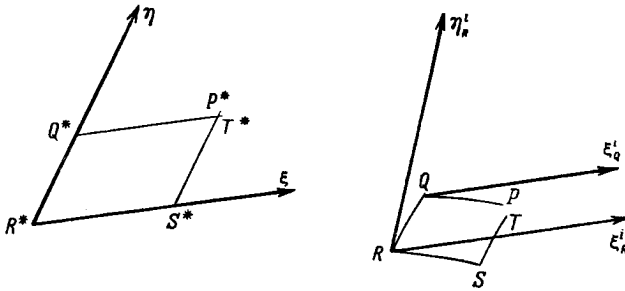


Рис 18.

Тогда кривая C представляет собой ломаную $PQRST$, состоящую из отрезков геодезических. Концы ломаной P и T , в общем случае, уже не совпадают.

Правда, мы до сих пор не рассматривали изображений кусочно гладких кривых, но они осуществляются без труда: прежнее построение повторяется дословно, и вся разница будет в том, что функции $\mu^k(t)$ в угловых точках терпят разрыв непрерывности.

Обозначим через ξ, η постоянные векторы, направленные по R^*S^*, R^*Q^* , причем будем считать:

$$\overrightarrow{R^*S^*} = \xi\tau, \quad (92.16)$$

$$\overrightarrow{R^*Q^*} = \eta\tau, \quad (92.17)$$

где $\tau \rightarrow 0$ (при неподвижной точке R^*). Мы будем рассматривать, таким образом, бесконечно малый параллелограмм, стягивающийся в точку R^* . Аналогично в оригинале ломаная $PQRST$ стягивается в точку R . Оценим теперь с точностью 2-го порядка относительно τ зазор TP , образовавшийся при переходе от параллелограмма в изображении к ломаной в оригинале. Для этого мы подсчитаем разности координат $x_P^k - x_T^k$:

$$x_P^k - x_T^k = \{(x_P^k - x_Q^k) - (x_S^k - x_R^k)\} - \{(x_T^k - x_S^k) - (x_Q^k - x_R^k)\}. \quad (92.18)$$

Обозначим ξ_R^i, η_R^i векторы в точке R , касательные соответственно к \overline{RS} и \overline{RQ} и имеющие своим изображением векторы ξ и η .

Так как (92.16) вполне аналогично (92.15), то, применяя (92.14), пишем:

$$x_S^k - x_R^k = \xi_R^k \tau - \frac{1}{2} \Gamma_{ij}^k \xi_R^i \xi_R^j \tau^2 + \dots \quad (92.19)$$

Здесь и в дальнейшем Γ_{ij}^k вычисляются в точке R . Совершенно аналогично

$$x_Q^k - x_R^k = \eta_R^k \tau - \frac{1}{2} \Gamma_{ij}^k \eta_R^i \eta_R^j \tau^2 + \dots \quad (92.20)$$

Теперь для аналогичного подсчета $x_P^k - x_Q^k$ мы снова можем применить (92.14), учитывая, что

$$\overrightarrow{Q^*P^*} (= \overrightarrow{R^*S^*}) = \xi \tau$$

вполне аналогично (92.15). Только теперь исходной точкой будет служить уже не P , а Q . Соответственно этому в (92.14) в качестве ξ_P^i нужно взять вектор ξ_Q^i , касательный к \overline{QP} в точке Q и имеющий своим изображением по-прежнему ξ . Такой вектор ξ_Q^i легко получить параллельным перенесением ξ_R^i из точки R в точку Q по пути \overline{RQ} , так как при этом изображение ξ_R^i тоже переносится параллельно, т. е. остается вектором ξ . С точностью 1-го порядка можно записать формулу параллельного перенесения

$$d\xi^k = -\Gamma_{ij}^k \xi^j dx^i$$

в виде

$$\xi_Q^k - \xi_R^k = -\Gamma_{ij}^k \xi_R^j (x_Q^i - x_R^i) + \dots,$$

подменив дифференциалы приращениями. Заменяя с той же точностью $x_Q^i - x_R^i$ из (92.20), имеем окончательно:

$$\xi_Q^k = \xi_R^k - \Gamma_{ij}^k \xi_R^i \eta_R^j \tau + \dots \quad (92.21)$$

Применяя теперь (92.14) для подсчета $x_P^k - x_Q^k$, получаем:

$$x_P^k - x_Q^k = \xi_Q^k \tau - \frac{1}{2} \Gamma_{ij}^k \xi_Q^i \xi_Q^j \tau^2 + \dots \quad (92.22)$$

Здесь, собственно, Γ_{ij}^k следовало бы брать в точке Q . Однако мы будем брать их по-прежнему в точке R , учитывая, что в Γ_{ij}^k при этом будет допущена ошибка бесконечно малая 1-го порядка, а после умножения на τ^2 — уже 3-го порядка (которым мы пренебрегаем). Вставляем теперь в правую часть равенства (92.22) ξ_Q^k из (92.21),

причем в первом члене происходит умножение на τ , и точность 1-го порядка превращается в точность 2-го порядка, а во втором ввиду умножения на τ^2 достаточно вставить вместо ξ_Q^k лишь его главную часть ξ_R^k . В результате имеем:

$$x_P^k - x_Q^k = \xi_R^k \tau - \Gamma_{ij}^k \xi_R^i \eta_R^j \tau^2 - \frac{1}{2} \Gamma_{ij}^k \xi_R^i \xi_R^j \tau^2 + \dots \quad (92.23)$$

Вычитая почленно (92.19) из (92.23), получим первую фигурную скобку в (92.18):

$$\{(x_P^k - x_Q^k) - (x_S^k - x_R^k)\} = -\Gamma_{ij}^k \xi_R^i \eta_R^j \tau^2 + \dots$$

Вычисление второй фигурной скобки должно проходить совершенно симметричным образом лишь с переменной ролей векторов ξ_R^i, η_R^i . В результате приходим к выражению

$$(x_T^k - x_S^k) - (x_Q^k - x_R^k) = -\Gamma_{ij}^k \eta_R^i \xi_R^j \tau^2 + \dots$$

Вычитая почленно это равенство из предыдущего, мы согласно (92.18) найдем искомый зазор:

$$x_P^k - x_T^k = \Gamma_{ij}^k \xi_R^i \eta_R^j \tau^2 - \Gamma_{ij}^k \xi_R^i \eta_R^j \tau^2 + \dots$$

Меняя в последнем члене обозначения индексов суммирования i на j и наоборот и пользуясь определением тензора кручения

$$S_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k,$$

получаем окончательно:

$$x_P^k - x_T^k = S_{ij}^k \xi_R^i \eta_R^j \tau^2 + \dots \quad (92.24)$$

Таким образом, мы можем резюмировать:

*Приращения координат x^i , которыми характеризуется зазор TP , с точностью 2-го порядка получаются в результате свертывания в точке R тензора кручения S_{ij}^k с векторами ξ_R^i, η_R^i , выражающими геодезические смещения RS, RQ (и дающими в изображении векторы $\vec{R^*S^*}, \vec{R^*Q^*}$).*

Итак, «зазор» в своей главной части выражается посредством тензора кручения в той точке R , к которой стягивается наш «разомкнутый параллелограмм». В этом и состоит геометрическое истолкование тензора кручения. Если связность будет без кручения, то «зазор» оказывается бесконечно малым уже не 2-го, а 3-го порядка относительно τ .

Подчеркнем, что эта роль нулевого кручения сказывается лишь в бесконечно малом. В случае конечных размеров и при нулевом кручении обнаруживаются те же явления «размыкания» замкнутых контуров. Наконец, следует отметить, что мы брали в качестве

замкнутого контура параллелограмм лишь для упрощения выкладок. Аналогичные результаты можно получить для любого бесконечно малого контура, стягивающегося в данную точку и расположенного в данной двумерной плоскости пространства A_n . Можно было бы исходить также—обратно тому, что мы делали,—из контуров, замкнутых в L_n и размыкающихся в A_n . Оценка зазора получилась бы по существу такой же.

§ 93*. Пространства L_n с абсолютным параллелизмом

В этом параграфе мы решим такую задачу: *найти всевозможные пространства аффинной связности L_n с абсолютным параллелизмом векторов*. Так мы будем называть пространства, в которых результат параллельного перенесения произвольного вектора ξ^i из точки P в точку Q при любом выборе этих точек не зависит от пути перенесения \overline{PQ} . Это значит, что по какому бы пути ни совершать переход из P в Q , мы придем в Q с одним и тем же вектором. Следовательно, мы получаем возможность вектор, заданный в какой-нибудь точке P , как бы откладывать из любой точки пространства. В результате возникает целое векторное поле. Очевидно, любой вектор этого поля можно принять за исходный и считать, что все другие векторы поля получены его параллельным перенесением. Такое векторное поле мы будем называть *однородным*.

Один пример L_n с абсолютным параллелизмом нам известен—это аффинное пространство A_n . Требуется выяснить, существуют ли и другие L_n с абсолютным параллелизмом и какие именно.

Допустим, что нам дано L_n с абсолютным параллелизмом. Выберем в какой-либо начальной точке M_0 n линейно независимых векторов

$$\xi_{(1)}^i, \dots, \xi_{(n)}^i$$

и путем их параллельного перенесения в любую точку M нашего пространства получаем n однородных векторных полей

$$\xi_{(1)}^i(M), \dots, \xi_{(n)}^i(M). \quad (93.1)$$

В силу абсолютного характера параллелизма эти векторы будут в каждой точке M вполне определенными; при этом их линейная независимость при параллельном перенесении сохранится. Параллельное перенесение любого вектора ξ^i из одной точки M в другую M' совершается теперь, очевидно, так: разложим вектор ξ^i по векторам $\xi_{(p)}^i(M)$ в данной точке M ; так как при параллельном перенесении линейные зависимости сохраняются, то параллельно перенесенный вектор ξ^i разлагается в точке M' по векторам $\xi_{(p)}^i(M')$ с теми же самыми коэффициентами. Этим перенесение определится.