замкнутого контура параллелограмм лишь для упрощения выкладок. Аналогичные результаты можно получить для любого бесконечно малого контура, стягивающегося в данную точку и расположенного в данной двумерной плоскости пространства A_n. Можно было бы исходить также — обратно тому, что мы делали, — из контуров, замкнутых в L_n и размыкающихся в A_n. Оценка зазора получилась бы по существу такой же.

§ 93*. Пространства L_n с абсолютным параллелизмом

В этом параграфе мы решим такую задачу: *найти всевозможные пространства аффинной связности L_n с абсолютным параллелизмом векторов*. Так мы будем называть пространства, в которых результат параллельного перенесения произвольного вектора ξ^i из точки P в точку Q при любом выборе этих точек не зависит от пути перенесения $\overset{\frown}{PQ}$. Это значит, что по какому бы пути ни совершать переход из P в Q, мы придем в Q с одним и тем же вектором. Следовательно, мы получаем возможность вектор, заданный в какой-нибудь точке P, как бы откладывать из любой точки пространства. В результате возникает целое векторное поле. Очевидно, любой вектор этого поля можно принять за исходный и считать, что все другие векторы поля получены его параллельным перенесением. Такое векторное поле мы будем называть *однородным*.

Один пример L_n с абсолютным параллелизмом нам известен — это аффинное пространство A_n. Требуется выяснить, существуют ли и другие L_n с абсолютным параллелизмом и какие именно.

Допустим, что нам дано L_n с абсолютным параллелизмом. Выберем в какой-либо начальной точке M_0 n линейно независимых векторов

$$\xi^i_{(1)}, \ldots, \xi^i_{(n)}$$

и путем их параллельного перенесения в любую точку M нашего пространства получаем n однородных векторных полей

$$\xi^i_{(1)}(M), \ldots, \xi^i_{(n)}(M). \tag{93.1}$$

В силу абсолютного характера параллелизма эти векторы будут в каждой точке M вполне определенными; при этом их линейная независимость при параллельном перенесении сохранится. Параллельное перенесение любого вектора ξ^i из одной точки M в другую M' совершается теперь, очевидно, так: разложим вектор ξ^i по векторам $\xi^i_{(p)}(M)$ в данной точке M; так как при параллельном перенесении линейные зависимости сохраняются, то параллельно перенесенный вектор ξ^i разлагается в точке M' по векторам $\xi^i_{(p)}(M')$ с теми же самыми коэффициентами. Этим перенесение определится.

Теперь ясно, что, обратно, задавая, в каком-либо многообразии $\mathfrak{M}_n$ n произвольно выбранных полей линейно независимых векторов)*

$$\xi^i_{(1)}(M), \ \ldots, \ \xi^i_{(n)}(M), \tag{93.2}$$

мы можем превратить $\mathfrak{M}_n$ в L_n с абсолютным параллелизмом. Действительно, мы можем тогда определить в $\mathfrak{M}_n$ абсолютное перенесение любого вектора ξ^i так, как это было только что описано. Может, однако, возникнуть сомнение, подходит ли это перенесение под наше общее определение, т. е. под формулу параллельного перенесения с определенным объектом связности Γ^i_{ij}. Покажем, что действительно всегда можно подобрать такой объект связности Γ^k_{ij}, для которого наши наперед заданные векторы $\xi^i_{(p)}(M)$ будут параллельно переносимыми векторами при любом бесконечно малом смещении из любой точки. Тем самым и все их линейные комбинации с постоянными коэффициентами будут тоже параллельно переносимыми векторами, и построенную нами связность с абсолютным параллелизмом можно будет считать порожденной объектом Γ^k_{ij}. Запишем, что каждый из $\xi^i_{(p)}$ при любом бесконечно малом смещении из любой точки M должен удовлетворять формуле параллельного перенесения

$$d\xi^k_{(p)} = -\Gamma^k_{ij}\,\xi^j_{(p)}\,dx^i,$$

где Γ^k_{ij} — искомый объект связности. Так как $\xi^k_{(p)}$ есть функция от $x^1, \ldots, x^n$ (которая предполагается непрерывно дифференцируемой), то левую часть можно развернуть как полный дифференциал, и мы получаем:

$$\frac{\partial \xi^k_{(p)}}{\partial x^i}\,dx^i = -\Gamma^k_{ij}\,\xi^j_{(p)}\,dx^i.$$

Так как это есть тождество относительно dx^i, то имеем окончательно:

$$\frac{\partial \xi^k_{(p)}}{\partial x^i} = -\Gamma^k_{ij}\,\xi^j_{(p)}. \tag{93.3}$$

Фиксируя на время k, i и давая p значения $1, 2, \ldots, n$, мы получаем здесь n линейных уравнений с n неизвестными $\Gamma^k_{i1}, \Gamma^k_{i2}, \ldots, \Gamma^k_{in}$. Определитель этой системы отличен от нуля в силу линейной независимости векторов (93.2), и следовательно, Γ^k_{ij} находятся однозначно. То, что при этом Γ^k_{ij} удовлетворяют обычному закону преобразования, видно из единственности определяемого ими перене-

*) Это всегда можно сделать в элементарном многообразии, но далеко не всегда в многообразии общего вида; многообразия, где это можно сделать, называются *параллелизуемыми*.

сения, а также может быть проверено формальной выкладкой, исходя из (93.3).

Таким образом, мы получили довольно обширный класс связностей с абсолютным параллелизмом. *Однако все они будут обладать кручением за исключением лишь случая (локально) аффинного пространства A_n.*

В самом деле, покажем, что *в случае L_n с абсолютным параллелизмом и без кручения можно, по крайней мере, в некоторой окрестности любой точки M, перейти к аффинным координатам $x^{i'}$, т. е. добиться $\Gamma^{k'}_{i'j'} \equiv 0$; тем самым наше L_n будет (локально) аффинным пространством.*

Для этого будем искать функциональную зависимость между x^i и $x^{i'}$ из системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial x^k}{\partial x^{m'}} = \xi^k_{(m)}(x^1, \ldots, x^n) \quad (k, m = 1, 2, \ldots, n). \tag{93.4}$$

Здесь x^k ищутся, таким образом, как функции от $x^{m'}$, причем частная производная каждой неизвестной функции по каждому аргументу выражена через сами неизвестные функции.

Геометрический смысл уравнений (93.4) состоит в следующем: мы ищем новые координаты $x^{m'}$ так, чтобы векторы $\frac{\partial x^i}{\partial x^{m'}}$, касательные к координатным линиям $x^{m'}$, совпадали с наперед заданными векторами $\xi^i_{(m)}$, т. е. обладали абсолютным параллелизмом. Легко видеть, что это требование соответствует свойствам аффинных координат. Следует отметить также инвариантный характер уравнений (93.4) относительно преобразования координат x^i, так как в левой и правой частях стоят одинаково преобразующиеся контравариантные тензоры (при фиксированном m). Составим условия интегрируемости этой системы. Дифференцируем (93.4) по $x^{l'}$ и частные производные, получающиеся в правой части, заменяем согласно (93.4):

$$\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{m'} \partial x^{l'}} = \frac{\partial \xi^k_{(m)}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{l'}} = \frac{\partial \xi^k_{(m)}}{\partial x^i} \cdot \xi^i_{(l)}.$$

Условия интегрируемости получаются, как известно, если мы запишем, что правая часть этого равенства должна быть (вслед за левой) симметрична относительно m, l:

$$\frac{\partial \xi^k_{(m)}}{\partial x^i} \xi^i_{(l)} = \frac{\partial \xi^k_{(l)}}{\partial x^i} \xi^i_{(m)}. \tag{93.5}$$

Если бы у нас было пространство с кручением, то условия интегрируемости не удовлетворялись бы тождественно, мы получили бы зависимость между $x^1, \ldots, x^n$, т. е. противоречие. Система (93.4) оказалась бы несовместной. Но в нашем случае дело обстоит иначе. В самом деле, умножая (93.3) на $\xi^i_{(q)}$ и свертывая по i, получим:

$$\frac{\partial \xi^k_{(p)}}{\partial x^i} \xi^i_{(q)} = -\Gamma^k_{ij} \xi^i_{(q)} \xi^j_{(p)}.$$

Из условия $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ вытекает, что *перестановка индексов* p, q в правой части равносильна перестановке обозначений индексов суммирования i, j и, следовательно, результата не меняет. Значит, и левая часть симметрична относительно p, q и условия интегрируемости (93.5) выполняются тождественно (при любых $x^1, \ldots, x^n$).

В теории дифференциальных уравнений доказывается, что в этом случае система (93.4) имеет решение и притом единственное при любых начальных условиях вида

$$x^k = x^k_0 \ (k = 1, 2, \ldots, n) \text{ при } x^{m'} = x^{m'}_0 (m' = 1', 2', \ldots, n'), \tag{93.6}$$

по крайней мере, в некоторой окрестности точки $x^{m'}_0$ *). В этой окрестности можно считать зависимость $x^k(x^{1'}, \ldots, x^{n'})$ обратимой, так как в силу линейной независимости векторов $\xi^k_{(m)}$ из уравнений (93.4) следует неравенство нулю якобиана:

$$\frac{\partial (x^1, \ldots, x^n)}{\partial (x^{1'}, \ldots, x^{n'})} \neq 0. \tag{93.7}$$

Таким образом, $x^{m'}$ можно принять за новые координаты в некоторой окрестности произвольной точки $M(x^1_0, \ldots, x^n_0)$. Новые координаты $x^{m'}$ подобраны, следовательно, специальным образом, в то время как старые x^k были произвольными. В частности, можно взять x^k совпадающими с $x^{m'}$; тогда (93.3), (93.4) дают

$$\frac{\partial \xi^{k'}_{(p)}}{\partial x^{i'}} = -\Gamma^{k'}_{i'j'} \xi^{j'}_{(p)}, \qquad \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{m'}} = \xi^{k'}_{(m)}.$$

Из второго равенства получаем:

$$\xi^{k'}_{(m)} = \delta^{k'}_{m'},$$

и, вставляя в первое, приходим к искомому результату

$$0 = -\Gamma^{k'}_{i'p'}, \text{ т. е. } \Gamma^{k'}_{i'p'} = 0.$$

Следовательно, $x^{m'}$ действительно служат аффинными координатами в некоторой окрестности данной точки M, и наше пространство является (локально) аффинным.

*) См., например, П. К. Рашевский, Геометрическая теория уравнений с частными производными, М.—Л., Гостехиздат, 1947. § 26.