§ 94. Аффинная связность в римановом пространстве

До сих пор мы рассматривали отдельно риманову геометрию порождаемую метрическим тензором $g_{ij}(M)$, и геометрию аффинной связности, порождаемую объектом связности $\Gamma^k_{ij}(M)$. Наиболее содержательная геометрическая картина получается при объединении той и другой геометрии, причем это можно сделать вполне естественным путем. *А именно, в римановом пространстве всегда можно построить и притом единственным образом связность* $\Gamma^k_{ij}(M)$, *обладающую следующими двумя свойствами.*

1°. *Кручение равно нулю*

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}. \tag{94.1}$$

2°. *Всякий раз, когда вдоль какого-либо пути одновременно переносятся параллельно два вектора* ξ, η, *их скалярное произведение не меняется.*

Из условия 2° следует, в частности, что скалярные квадраты параллельно переносимых векторов также остаются постоянными. Таким образом, мы хотим подобрать связность Γ^k_{ij} так, чтобы всевозможные векторы ξ, η, ..., заданные в какой-нибудь точке M, вели себя в процессе параллельного перенесения *как одно твердое тело*: не только аффинные, но и все их метрические свойства должны оставаться неизменными, в частности, не должны меняться их длины и углы между ними (все это вытекает из постоянства скалярных произведений $\xi\eta$). Это требование должно приблизить нас к положению вещей в евклидовом пространстве, где параллельное перенесение векторов, очевидно, сохраняет все их метрические свойства.

Условие 1° имеет аналогичное назначение: аффинная связность в евклидовом (или, что то же самое, в аффинном) пространстве имеет кручение нуль. Вводя связность в римановом пространстве, мы стараемся сохранить и это свойство.

Переходим к доказательству нашего утверждения. *Будем искать связность* Γ^k_{ij}, *удовлетворяющую условиям* 1°, 2°. Скалярное произведение векторов ξ, η записывается согласно (85.3) в виде

$$\xi\eta = g_{ij}\xi^i\eta^j.$$

Требование постоянства $\xi\eta$ при параллельном перенесении вдоль какого-либо пути можно записать в виде равенства нулю дифференциала

$$d(\xi\eta) = d(g_{ij}\xi^i\eta^j) = 0, \tag{94.2}$$

или

$$dg_{ij}\xi^i\eta^j + g_{ij}d\xi^i\eta^j + g_{ij}\xi^i d\eta^j = 0. \tag{94.3}$$

Так как векторы ξ, η переносятся параллельно, то

$$d\xi^k = -\Gamma^k_{pi}\xi^i\,dx^p, \qquad d\eta^k = -\Gamma^k_{pj}\eta^j\,dx^p,$$

где Γ^k_{ij} — коэффициенты *искомой* связности, а dx^p — дифференциалы координат точки при бесконечно малом смещении по пути. Кроме того,

$$dg_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^p}\,dx^p.$$

Вставляем все это в (94.3), изменив предварительно в этом равенстве обозначения индексов суммирования: во втором члене i на k, в третьем члене j на k. Получим:

$$\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^p} - g_{kj}\Gamma^k_{pi} - g_{ik}\Gamma^k_{pj}\right)\xi^i\eta^j\,dx^p = 0.$$

Так как ξ^i, η^j, dx^p мы можем выбирать совершенно произвольно, т. е. любые векторы можем переносить по любому пути, то равенство должно представлять собой тождество относительно ξ^i, η^j, dx^p. Отсюда вытекает обращение в нуль всех коэффициентов при этих величинах:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^p} - g_{kj}\Gamma^k_{pi} - g_{ik}\Gamma^k_{pj} = 0. \tag{94.4}$$

Из этих уравнений и из условия 1° и подлежат определению искомые Γ^k_{ij}. Очевидно, от соотношений (94.4) можно обратной выкладкой вернуться к (94.2), так что эти соотношения не только необходимы, но и достаточны для соблюдения условия 2°.

Обозначим аналогично (79.14):

$$\Gamma_{l,ij} = g_{lk}\Gamma^k_{ij}. \tag{94.5}$$

Ясно, что обратным поднятием индекса через величины $\Gamma_{l,ij}$ можно выразить Γ^k_{ij}:

$$\Gamma^k_{ij} = g^{kl}\Gamma_{l,ij}. \tag{94.6}$$

При этом в силу условия 1° как Γ^k_{ij}, так и $\Gamma_{l,ij}$ симметричны по индексам i, j.

Теперь уравнения (94.4) перепишутся в виде

$$\Gamma_{j,pi} + \Gamma_{i,pj} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^p}. \tag{94.7}$$

Но эти уравнения по форме вполне совпадают с (79.17) и решаются таким же образом. Получаем (аналогично (79.18)):

$$\Gamma_{l,mk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l}\right) \tag{94.8}$$

и согласно (94.6)

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right). \tag{94.9}$$

Формулы (94.9) *дают решение поставленной задачи, как мы видим, единственное.* Мы нашли связность без кручения, сохраняющую скалярное произведение любых двух параллельно переносимых векторов; оказалось, что она будет только одна.

Ранее полученную формулу (79.19) по внешности совершенно такую же, как формула (94.9), нужно рассматривать как частный случай последней. Действительно, формула (79.19), решает *для евклидова пространства* по существу ту же самую задачу, которую мы решили сейчас для более общего случая *риманова пространства.*

Может показаться, что нужно проверить, образуют ли Γ^k_{ij}, найденные в различных координатных системах x^i, один и тот же объект связности, т. е. удовлетворяют ли они закону преобразования (89.1). Однако это можно утверждать и без проверки. Действительно, в силу *инвариантного* характера требований 1°, 2° безразлично, в каких координатах x^i искать нашу связность; она будет получаться всегда одной и той же. Но это и означает, что Γ^k_{ij}, вычисленные в любых координатах, образуют один и тот же объект связности. Конечно, это можно проверить и непосредственной выкладкой, исходя из (94.9) и пользуясь законом преобразования метрического тензора g_{ij}.

Полученную связность в римановом пространстве мы будем называть римановой связностью. В дальнейшем будем всегда считать, что риманово пространство снабжено этой связностью.

В заключение покажем геометрический смысл нашего параллельного перенесения в том случае, когда риманово пространство V_m реализовано в виде поверхности в евклидовом пространстве R_n:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, \ldots, u^m) \tag{94.10}$$

(см. § 86 (86.4)). Разложим вторые частные производные $\mathbf{x}_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}$ на составляющие по касательной плоскости A_m $\left(\text{т. е. по ее направляющим векторам } \mathbf{x}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\alpha}\right)$ и по нормальной плоскости B_{n-m}:

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta} = \tilde{\Gamma}^\delta_{\alpha\beta}\mathbf{x}_\delta + \mathbf{y}_{\alpha\beta}, \tag{94.11}$$

где $\tilde{\Gamma}^\delta_{\alpha\beta}$ — некоторые коэффициенты разложения, очевидно, симметричные по нижним индексам, а $\mathbf{y}_{\alpha\beta}$ — вектор в B_{n-m}, так что

$$\mathbf{y}_{\alpha\beta}\mathbf{x}_\gamma = 0. \tag{94.12}$$

Покажем, что $\tilde{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta}$ *совпадают с коэффициентами связности* $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ *в римановом пространстве* V_m. Умножая для этого (94.11) на $\mathbf{x}_\nu$ скалярно и учитывая (94.12), получаем:

$$\mathbf{x}_\gamma \mathbf{x}_{\alpha\beta} = \tilde{\Gamma}^{\delta}_{\alpha\beta} \mathbf{x}_\delta \mathbf{x}_\gamma.$$

Так как согласно (86.9)

$$\mathbf{x}_\alpha \mathbf{x}_\beta = G_{\alpha\beta}, \tag{94.13}$$

то

$$\mathbf{x}_\gamma \mathbf{x}_{\alpha\beta} = G_{\gamma\delta} \tilde{\Gamma}^{\delta}_{\alpha\beta} = \tilde{\Gamma}_{\gamma,\alpha\beta}, \tag{94.14}$$

где $\tilde{\Gamma}_{\gamma,\alpha\beta}$ обозначает результат опускания индекса.

Дифференцируя (94.13) по u^γ, получаем:

$$\mathbf{x}_{\alpha\gamma} \mathbf{x}_\beta + \mathbf{x}_\alpha \mathbf{x}_{\beta\gamma} = \frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma},$$

т. е.

$$\tilde{\Gamma}_{\beta,\gamma\alpha} + \tilde{\Gamma}_{\alpha,\gamma\beta} = \frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}. \tag{94.15}$$

Эти уравнения в применении к V_m совпадают с уравнениями (94.7), а следовательно, $\tilde{\Gamma}_{\gamma,\alpha\beta}$ совпадают с $\Gamma_{\gamma,\alpha\beta}$. Отсюда, поднимая первый индекс, убеждаемся и в совпадении $\tilde{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta}$ с $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$. *Окончательно разложение* (94.11) *принимает вид*

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\delta}_{\alpha\beta} \mathbf{x}_\delta + \mathbf{y}_{\alpha\beta}. \tag{94.16}$$

Здесь принципиально важно, что коэффициенты $\Gamma^{\delta}_{\alpha\beta}$ вполне определяются из римановой метрики $G_{\alpha\beta}$ на поверхности V_m вне зависимости от способа ее вложения в R_n.

Пусть теперь на поверхности V_m задана кривая

$$u^\alpha = u^\alpha(t),$$

а вдоль этой кривой мы строим поле вектора $\xi(t)$, касательного к V_m. Тем самым согласно (86.6) имеет место разложение

$$\xi(t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\alpha} \xi^\alpha(t) = \mathbf{x}_\alpha \xi^\alpha(t), \tag{94.17}$$

где $\xi^\alpha(t)$ — координаты вектора ξ в многообразии V_m. Рассмотрим дифференциал вектора ξ при бесконечно малом смещении по кривой:

$$d\xi = d\mathbf{x}_\alpha \xi^\alpha + \mathbf{x}_\alpha d\xi^\alpha = \mathbf{x}_{\alpha\beta} du^\beta \xi^\alpha + \mathbf{x}_\alpha d\xi^\alpha.$$

В последнем члене заменяем обозначение индекса суммирования на δ, а $\mathbf{x}_{\alpha\beta}$ выражаем согласно (94.16). Получим:

$$d\xi = (\Gamma^{\delta}_{\alpha\beta}\, du^\beta \xi^\alpha + d\xi^\delta)\, \mathbf{x}_\delta + \mathbf{y}_{\alpha\beta}\, du^\beta \xi^\alpha. \tag{94.18}$$

Мы хотим, чтобы вектор $\xi(t)$ при переходе от точки t к точке $t+dt$ по нашей кривой *изменялся возможно наименьшим образом*. Мы не можем требовать, чтобы он совсем не менялся, так как касательная плоскость A_m к V_m, в которой он расположен, вообще говоря, поворачивается при переходе от точки к точке. Если ξ в точке t задан, то при переходе в точку $t+dt$ мы можем распоряжаться лишь значениями $d\xi^\delta$. При этом мы можем уничтожить в разложении (94.18) первый член, направленный по касательной плоскости A_m в точке t, если положим:

$$\Gamma^{\delta}_{\alpha\beta}\, du^{\beta}\xi^{\alpha} + d\xi^{\delta} = 0, \text{ т. е. } d\xi^{\delta} = -\Gamma^{\delta}_{\beta\alpha}\xi^{\alpha}\, du^{\beta}. \qquad (94.19)$$

Мы заменили здесь $\Gamma^{\delta}_{\alpha\beta}$ через $\Gamma^{\delta}_{\beta\alpha}$ по свойству римановой связности. Что же касается второго члена, направленного по нормальной плоскости B_{n-m}, то мы не в состоянии его как-либо варьировать, так как он $d\xi^{\delta}$ не содержит. Поэтому наилучшего возможного результата в смысле малости $d\xi$ мы добиваемся, уничтожая его касательную составляющую, т. е. перенося вектор ξ из точки t в точку $t+dt$ согласно (94.19). Но это есть параллельное перенесение согласно римановой связности на V_m.

Таким образом, параллельное перенесение вектора ξ в римановом пространстве V_m при вложении V_m в R_n в качестве поверхности получает следующее геометрическое истолкование: с точки зрения объемлющего пространства R_n вектор ξ переносится так, чтобы касательная составляющая $d\xi$ все время была равна нулю, т. е. чтобы $d\xi$ был нормален к V_m, $d\xi \perp A_m$. Как мы только что видели, для вектора ξ, касательного к поверхности V_m, этот способ перенесения есть наилучшее приближение к идеальному случаю, когда переносимый вектор просто не меняется. Тем самым введенное нами параллельное перенесение в римановом пространстве получает дополнительное геометрическое обоснование.

Как побочный результат получается следующая теорема. При любом способе вложения данного V_m в R_n перенесение касательного вектора ξ по полученной поверхности с соблюдением условия $d\xi \perp A_m$ всегда имеет один и тот же смысл, так как совпадает с параллельным перенесением согласно римановой связности на V_m.