ГЛАВА VIII

# АППАРАТ АБСОЛЮТНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

В пространстве аффинной связности $L_n$, в частности, в римановом пространстве $V_n$, естественным путем возникает аппарат *абсолютного дифференцирования*. Смысл его заключается в следующем. Желая исследовать какое-нибудь тензорное поле, например, $U^{ij}_{klm}(M)$, в бесконечно малой окрестности данной точки $M$, мы рассматриваем, как обычно, полные дифференциалы $dU^{ij}_{klm}$ функций $U^{ij}_{klm}(x^1, \ldots, x^n)$. Однако эти дифференциалы уже не образуют тензора и преобразуются по более сложному закону с участием самих $U^{ij}_{klm}$. Это мешает выявлению инвариантных результатов и не позволяет пользоваться аппаратом тензорной алгебры. Делу можно помочь тем, что, прежде чем вычислять дифференциалы $dU^{ij}_{klm}$, мы параллельно переносим тензор поля $U^{ij}_{klm}(M')$ *из бесконечно близкой точки $M'$ в данную точку $M$* и уже после этого вычитаем из него тензор $U^{ij}_{klm}$ в данной точке. Главная линейная часть полученной разности и будет *абсолютным дифференциалом* $DU^{ij}_{klm}$ тензора $U^{ij}_{klm}$. Это будет снова тензор того же строения, как и $U^{ij}_{klm}$. Что касается параллельного перенесения тензоров, то оно легко определяется на основе параллельного перенесения векторов, как будет показано в ближайшем параграфе.

Тензорная алгебра, дополненная аппаратом абсолютного дифференцирования, образует *тензорный анализ*.

## § 95. Параллельное перенесение тензоров в $L_n$

Пусть пространство аффинной связности $L_n$ отнесено к координатной системе $x^i$, и пусть в некоторой точке $M$ задан тензор, например, $U^{ij}_{lm}$. Мы знаем, что координаты этого тензора относительно координатной системы $x^i$ можно рассматривать в то же время и как его координаты относительно локального репера $\{M, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в касательном пространстве $A_n$ в точке $M$ (§ 82).

Зададимся в $A_n$ аффинным репером $\{M, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$, где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ суть $n$ произвольных линейно независимых векторов. Если координаты вектора $\xi_k$ обозначить $\xi_k^i$, то, очевидно,

$$\xi_k = \xi_k^i \mathbf{e}_i, \tag{95.1}$$

так как координаты вектора $\xi_k$ в координатной системе $x^i$ суть в то же время его координаты относительно соответствующего локального репера (§ 82).

Вообще при переходе от одного аффинного репера к другому тензор $U_{lm}^{ij}$ преобразуется по закону

$$U_{l'm'}^{i'j'} = A_i^{i'} A_j^{j'} A_{l'}^{l} A_{m'}^{m} U_{lm}^{ij}, \tag{95.2}$$

причем

$$\mathbf{e}_{i'} = A_{i'}^{i} \mathbf{e}_i. \tag{95.3}$$

Мы хотим в записи закона преобразования ограничиться лишь матрицей $A_{i'}^{i}$ и не прибегать к обратной матрице $A_i^{i'}$. Для этого умножаем соотношение (95.2) почленно на $A_{i'}^{p} A_{j'}^{q}$ и производим суммирование по $i'$, $j'$. В правой части получим:

$$A_{i'}^{p} A_i^{i'} = \delta_i^p, \quad A_{j'}^{q} A_j^{j'} = \delta_j^q,$$

так что

$$A_{i'}^{p} A_{j'}^{q} U_{l'm'}^{i'j'} = \delta_i^p \delta_j^q A_{l'}^{l} A_{m'}^{m} U_{lm}^{ij} = A_{l'}^{l} A_{m'}^{m} U_{lm}^{pq};$$

и окончательно, меняя для симметрии обозначения индексов суммирования $i'$, $j'$ на $p'$, $q'$, получим:

$$A_{p'}^{p} A_{q'}^{q} U_{l'm'}^{p'q'} = A_{l'}^{l} A_{m'}^{m} U_{lm}^{pq}. \tag{95.4}$$

В результате закон преобразования (95.2) записан с участием лишь одной матрицы $A_{i'}^{i}$, зато в виде, не разрешенном ни относительно старых, ни относительно новых координат тензора. Ясно, что, обратно, соотношения (95.4) влекут за собой (95.2); чтобы убедиться в этом, достаточно умножить (95.4) почленно на $A_p^{i'} A_q^{j'}$ и произвести в левой части свертывание по $p$, $q$.

Для примера мы взяли тензор, два раза ковариантный и два раза контравариантный; но запись (95.4) применяется очевидным образом и для тензора произвольного строения: в левой части пишется по одному множителю вида $A_{i'}^{i}$ для каждого верхнего, а в правой — для каждого нижнего индекса.

Возвращаясь к нашей задаче, обозначим через $\tilde{U}_{rs}^{pq}$ координаты тензора $U_{lm}^{ij}$ относительно репера $\{M, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$. Когда мы переходим к этому реперу от локального репера $\{M, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$

согласно (95.1), роль матрицы $A^i_{i'}$ играет матрица $\xi^i_k$. Поэтому закон преобразования (95.4) принимает вид

$$\xi^i_p \xi^j_q \tilde{U}^{pq}_{rs} = \xi^l_r \xi^m_s U^{ij}_{lm}. \tag{95.5}$$

*Так связаны координаты тензора $U^{ij}_{lm}$ в координатной системе $x^i$ с его координатами $\tilde{U}^{pq}_{rs}$ относительно произвольного репера $\{M, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ в касательном пространстве $A_n$.*

*Допустим теперь, что векторы этого репера параллельно переносятся, в то время как точка $M$ описывает некоторый путь в $L_n$. Мы будем говорить, что тензор $U^{ij}_{lm}$ параллельно переносится вдоль данного пути, если он задается в каждой точке этого пути и притом так, что его координаты $\tilde{U}^{ij}_{lm}$ относительно параллельно переносимого репера сохраняют постоянные значения:*

$$\tilde{U}^{pq}_{rs} = \mathrm{const}. \tag{95.6}$$

Это определение параллельного перенесения тензора не зависит от выбора параллельно переносимого репера $\{M, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$. В самом деле, пусть $\{M, \xi_{1'}, \ldots, \xi_{n'}\}$ — другой репер, параллельно переносимый вдоль того же пути в $L_n$. Разлагая векторы $\xi_{i'}$ по векторам $\xi_i$,

$$\xi_{i'} = A^i_{i'} \xi_i,$$

мы замечаем, что $A^i_{i'}$ остаются постоянными, так как в процессе параллельного перенесения линейные зависимости между векторами сохраняются (§ 89). Поэтому, записывая закон преобразования (95.2), убеждаемся, что $\tilde{U}^{p'q'}_{r's'}$ остаются постоянными вместе с $\tilde{U}^{pq}_{rs}$ и $A^i_{i'}$, т. е. наш тензор имеет постоянные (хотя и различные) координаты относительно *любого* параллельно переносимого вдоль данного пути репера.

Таким образом, определенное нами параллельное перенесение тензора совершается вдоль данного пути строго единственным образом. В частности, если в данной точке тензор был равен нулю, то в результате параллельного перенесения он, очевидно, остается равным нулю.

Теперь выясним, как записать закон параллельного перенесения тензора, заданного своими координатами $U^{ij}_{lm}$ *относительно координатной системы* $x^i$. Для этой цели дифференцируем почленно соотношение (95.5) вдоль рассматриваемого пути, учитывая постоянство $\tilde{U}^{pq}_{rs}$. Получим:

$$d\xi^i_p \xi^j_q \tilde{U}^{pq}_{rs} + \xi^i_p \, d\xi^j_q \tilde{U}^{pq}_{rs} = d\xi^l_r \xi^m_s U^{ij}_{lm} + \xi^l_r \, d\xi^m_s U^{ij}_{lm} + \xi^l_r \xi^m_s \, dU^{ij}_{lm}. \tag{95.7}$$

Так как все векторы репера переносятся параллельно, то

$$d\xi_p^i = -\Gamma_{kt}^i \xi_p^t \, dx^k. \tag{95.8}$$

Прежде чем вставлять это выражение для $d\xi_p^i$ в предыдущую формулу, можно сделать предположение, сильно упрощающее выкладку. Предположим, что параллельно переносимый репер $\{M, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ выбран так, что *в той точке пути*, в которой в данный момент производится дифференцирование, он совпадает с локальным репером $\{M, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Мы знаем, что на параллельном перенесении тензора это не отразится. Тогда *в данной точке в силу совпадения реперов* мы имеем $\tilde{U}_{rs}^{ij} = U_{rs}^{ij}$; кроме того, как видно из (95.1), $\xi_k^i = \delta_k^i$, и (95.8) принимает вид

$$d\xi_p^i = -\Gamma_{kp}^i \, dx^k. \tag{95.9}$$

Аналогичные упрощения за счет $\xi_k^i = \delta_k^i$ произойдут и в (95.7), так что (учитывая $\tilde{U}_{rs}^{ij} = U_{rs}^{ij}$) получим:

$$d\xi_p^i \, U_{rs}^{pj} + d\xi_q^j U_{rs}^{iq} = d\xi_r^l U_{ls}^{ij} + d\xi_s^m U_{rm}^{ij} + dU_{rs}^{ij}.$$

Заменяем здесь $d\xi_p^i$ и т. д. согласно (95.9). Это дает нам

$$-\Gamma_{kp}^i \, dx^k U_{rs}^{pj} - \Gamma_{kq}^j \, dx^k U_{rs}^{iq} = -\Gamma_{kr}^l \, dx^k U_{ls}^{ij} - \Gamma_{ks}^m \, dx^k U_{rm}^{ij} + dU_{rs}^{ij}.$$

Выражая отсюда $dU_{rs}^{ij}$, вынося $dx^k$ за скобку и обозначая все индексы суммирования (кроме $k$) через $p$, получим окончательно:

$$dU_{rs}^{ij} = \{-\Gamma_{kp}^i U_{rs}^{pj} - \Gamma_{kp}^j U_{rs}^{ip} + \Gamma_{kr}^p U_{ps}^{ij} + \Gamma_{ks}^p U_{rp}^{ij}\} \, dx^k. \tag{95.10}$$

Мы получили дифференциалы координат параллельно переносимого вдоль данного пути тензора $U_{rs}^{ij}$, выраженные через сами координаты этого тензора и, конечно, через дифференциалы координат точки и объект связности. Координаты тензора берутся теперь относительно лишь координатной системы $x^i$ (т. е. локального репера); параллельно переносимый репер сыграл свою роль и больше ни в чем не участвует.

Запутанность полученной формулы лишь кажущаяся; в действительности она составлена строго закономерно и по простой схеме. А именно, каждому верхнему индексу тензора (например, $i$) в правой части формулы отвечает определенный член (в данном случае первый), составленный следующим образом: данный индекс переходит на объект связности, причем на освободившееся место ставится индекс суммирования (в данном случае $p$), который свертывается со вторым индексом внизу у объекта связности. Остальные индексы у тензора переписываются без изменения. Первый индекс у объекта связности (в нашем случае $k$) всегда свертывается с дифференциалами координат точки. Все выражение берется с обратным знаком. В нашем примере тензор имеет два верхних индекса, и в правой части формулы мы получаем два отвечающих им по этому правилу члена. Но весь проделанный нами вывод дословно повторяется и для тензора с любым числом индексов наверху, причем в правой части формулы появляются составленные по указанному правилу члены по одному для каждого индекса.

Для каждого нижнего индекса (например, $r$) в правой части формулы также имеется соответствующий член (в данном случае третий), составленный по несколько иному правилу. Данный индекс переходит на объект связности на второе место внизу; на освободившееся место ставится индекс суммирования (в нашем случае $p$), который свертывается с верхним индексом объекта связности. Остальные индексы у тензора переписываются без изменения. Первый индекс у объекта связности по-прежнему свертывается с дифференциалами координат точки. Все выражение берется со своим знаком. В нашем случае мы имеем в правой части два члена такого типа соответственно двум нижним индексам. Но весь вывод повторяется и при любом числе нижних индексов. Поэтому на (95.10) нужно смотреть как на схему записи дифференциалов координат любого параллельно переносимого тензора.

Эта схема станет более отчетливой, если выделить два основных случая: когда параллельно переносимый тензор один раз контравариантный ($U^i$) и когда он один раз ковариантный ($U_r$). В первом случае в правой части формулы (95.10) мы помещаем лишь один член, отвечающий индексу $i$:

$$dU^i = -\Gamma^i_{kp} U^p \, dx^k. \tag{95.11}$$

Мы, как и следовало ожидать, вернулись к формуле параллельного перенесения вектора $U^i$.

Во втором случае в правой части формулы (95.10) нужно поместить лишь один член, отвечающий нижнему индексу $r$:

$$dU_r = \Gamma^p_{kr} U_p \, dx^k. \tag{95.12}$$

Такова формула параллельного перенесения один раз ковариантного тензора (ковектора). Если теперь вернуться к общей схеме (95.10), то можно сказать, что *для каждого верхнего индекса параллельно переносимого тензора в правой части формулы составляется член согласно* (95.11), *а для каждого нижнего индекса — согласно* (95.12), *в обоих случаях так, как если бы данный индекс был единственным; при этом нужно лишь приписывать каждый раз остальные индексы без каких-либо изменений по сравнению с левой частью.*

Таким образом, в общем случае формула (95.10) будет иметь вид

$$dU^{i_1 i_2 \ldots i_u}_{r_1 r_2 \ldots r_v} = \{ -\Gamma^{i_1}_{kp} U^{p i_2 \ldots i_u}_{r_1 r_2 \ldots r_v} - \\ - \Gamma^{i_2}_{kp} U^{i_1 p \ldots i_u}_{r_1 r_2 \ldots r_v} - \ldots - \Gamma^{i_u}_{kp} U^{i_1 i_2 \ldots p}_{r_1 r_2 \ldots r_v} + \Gamma^{p}_{k r_1} U^{i_1 i_2 \ldots i_u}_{p r_2 \ldots r_v} + \\ + \Gamma^{p}_{k r_2} U^{i_1 i_2 \ldots i_u}_{r_1 p \ldots r_v} + \ldots + \Gamma^{p}_{k r_v} U^{i_1 i_2 \ldots i_u}_{r_1 r_2 \ldots p} \} \, dx^k. \quad (95.13)$$

В частности, когда тензор лишен индексов, т. е. представляет собой просто инвариант $U$, в правой части не будет ни одного члена, и формула принимает вид

$$dU = 0,$$

т. е.

$$U = \text{const}.$$

Параллельное перенесение инварианта, как и следовало ожидать, сохраняет его численное значение.

## § 96. Абсолютный дифференциал и абсолютная производная

Пусть точка $M$ в пространстве аффинной связности $L_n$ пробегает некоторый путь

$$x^i = x^i(t), \quad (96.1)$$

причем в каждой точке этого пути задан тензор определенного строения, например $U^{ij}_{rs}$:

$$U^{ij}_{rs} = U^{ij}_{rs}(t). \quad (96.2)$$

Другими словами, нам задано тензорное поле, по крайней мере, вдоль данного пути. Как обычно, функциональные зависимости предполагаются непрерывно дифференцируемыми.

Переходя из данной точки пути $t$ в его бесконечно близкую точку $t + dt$, мы находим в ней тензор поля с координатами

$$U^{ij}_{rs}(t + dt) \approx U^{ij}_{rs}(t) + dU^{ij}_{rs}(t). \quad (96.3)$$

Здесь мы пренебрегли бесконечно малыми высшего порядка относительно $dt$, заменив приращения функций $U^{ij}_{rs}(t)$ их дифференциалами. С той же степенью точности мы будем вести выкладку и далее. Однако, желая оценить, насколько изменился тензор поля $U^{ij}_{rs}(t)$ при переходе из точки $t$ в точку $t + dt$, мы не должны ориентироваться на дифференциалы его координат $dU^{ij}_{rs}(t)$. В самом деле, $U^{ij}_{rs}$ и $U^{ij}_{rs} + dU^{ij}_{rs}$ — это тензоры, заданные *в разных точках, именно*