Таким образом, в общем случае формула (95.10) будет иметь вид

$$dU^{i_1 i_2 \ldots i_u}_{r_1 r_2 \ldots r_v} = \{ -\Gamma^{i_1}_{kp} U^{p i_2 \ldots i_u}_{r_1 r_2 \ldots r_v} - \\ - \Gamma^{i_2}_{kp} U^{i_1 p \ldots i_u}_{r_1 r_2 \ldots r_v} - \ldots - \Gamma^{i_u}_{kp} U^{i_1 i_2 \ldots p}_{r_1 r_2 \ldots r_v} + \Gamma^{p}_{kr_1} U^{i_1 i_2 \ldots i_u}_{p r_2 \ldots r_v} + \\ + \Gamma^{p}_{kr_2} U^{i_1 i_2 \ldots i_u}_{r_1 p \ldots r_v} + \ldots + \Gamma^{p}_{kr_v} U^{i_1 i_2 \ldots i_u}_{r_1 r_2 \ldots p} \} \, dx^k. \quad (95.13)$$

В частности, когда тензор лишен индексов, т. е. представляет собой просто инвариант U, в правой части не будет ни одного члена, и формула принимает вид

$$dU = 0,$$

т. е.

$$U = \mathrm{const}.$$

Параллельное перенесение инварианта, как и следовало ожидать, сохраняет его численное значение.

§ 96. Абсолютный дифференциал и абсолютная производная

Пусть точка M в пространстве аффинной связности L_n пробегает некоторый путь

$$x^i = x^i(t), \quad (96.1)$$

причем в каждой точке этого пути задан тензор определенного строения, например U^{ij}_{rs}:

$$U^{ij}_{rs} = U^{ij}_{rs}(t). \quad (96.2)$$

Другими словами, нам задано тензорное поле, по крайней мере, вдоль данного пути. Как обычно, функциональные зависимости предполагаются непрерывно дифференцируемыми.

Переходя из данной точки пути t в его бесконечно близкую точку $t+dt$, мы находим в ней тензор поля с координатами

$$U^{ij}_{rs}(t+dt) \approx U^{ij}_{rs}(t) + dU^{ij}_{rs}(t). \quad (96.3)$$

Здесь мы пренебрегли бесконечно малыми высшего порядка относительно dt, заменив приращения функций $U^{ij}_{rs}(t)$ их дифференциалами. С той же степенью точности мы будем вести выкладку и далее. Однако, желая оценить, насколько изменился тензор поля $U^{ij}_{rs}(t)$ при переходе из точки t в точку $t+dt$, мы не должны ориентироваться на дифференциалы его координат $dU^{ij}_{rs}(t)$. В самом деле, U^{ij}_{rs} и $U^{ij}_{rs}+dU^{ij}_{rs}$ — это тензоры, заданные *в разных точках, именно* *в точках* t *и* $t+dt$, а значит, отнесенные к *разным локальным реперам.* При преобразовании координатной системы x^i эти локальные реперы испытывают преобразование вида (82.11):

$$\mathbf{e}_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \mathbf{e}_i,$$

где матрицы $\dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$ *вычислены в разных точках и, следовательно, являются различными.* Поэтому не имеет смысла сравнивать между собой тензоры $U^{ij}_{rs}(t)$ и $U^{ij}_{rs}(t+dt)$, отнесенные к различным и различно преобразующимся реперам. Другое дело, если мы предварительно перенесем параллельно тензор $U^{ij}_{rs}(t+dt)$ в ту же точку t, в которой задан тензор $U^{ij}_{rs}(t)$. Тогда оба тензора будут заданы в общей точке t, а значит, отнесены к общему локальному реперу. Вычитание из первого тензора второго будет иметь инвариантный смысл и даст нам снова тензор в точке t. Главную линейную часть этого тензора мы и назовем *абсолютным дифференциалом* $DU^{ij}_{rs}(t)$ тензора $U^{ij}_{rs}(t)$. Проделаем соответствующие выкладки.

Обозначим через $\tilde{U}^{ij}_{rs}$ тензор $U^{ij}_{rs}(t+dt)$, параллельно перенесенный из точки $t+dt$ в точку t. Это значит, что, обратно, $U^{ij}_{rs}(t+dt)$ получается параллельным перенесением $\tilde{U}^{ij}_{rs}$ из точки t в точку $t+dt$. Пользуясь формулой (95.10), можно записать:

$$U^{ij}_{rs}(t+dt) \approx$$
$$\approx \tilde{U}^{ij}_{rs} + \{-\Gamma^i_{kp}\tilde{U}^{pj}_{rs} - \Gamma^j_{kp}\tilde{U}^{ip}_{rs} + \Gamma^p_{kr}\tilde{U}^{ij}_{ps} + \Gamma^p_{ks}\tilde{U}^{ij}_{rp}\}\, dx^k. \qquad (96.4)$$

Мы поставили знак приближенного равенства, так как формула (95.10) дает нам лишь дифференциалы, а не приращения координат параллельно переносимого тензора, так что в равенстве допускается ошибка на бесконечно малые высшего порядка.

Как видно из (96.4), $\tilde{U}^{ij}_{rs}$ отличается от $U^{ij}_{rs}(t+dt)$, а следовательно, и от $U^{ij}_{rs}(t)$, на бесконечно малую величину. Поэтому с принятой степенью точности можно заменить в фигурной скобке $\tilde{U}^{ij}_{rs}$ через $U^{ij}_{rs}(t)$. Действительно, фигурные скобки множатся еще на dx^k, так что ошибка получается бесконечно малой высшего порядка. По той же причине можно заменить $U^{ij}_{rs}(t+dt)$ через $U^{ij}_{rs}(t)+dU^{ij}_{rs}(t)$. Выражая теперь $\tilde{U}^{ij}_{rs}$ из (96.4), получаем

$$\tilde{U}^{ij}_{rs} \approx U^{ij}_{rs}(t) + dU^{ij}_{rs}(t) +$$
$$+ \{\Gamma^i_{kp}U^{pj}_{rs}(t) + \Gamma^j_{kp}U^{ip}_{rs}(t) - \Gamma^p_{kr}U^{ij}_{ps}(t) - \Gamma^p_{ks}U^{ij}_{rp}(t)\}\, dx^k. \qquad (96.5)$$

Мы называем абсолютным (ковариантным) дифференциалом $DU^{ij}_{rs}(t)$ *главную линейную часть разности* $\tilde{U}^{ij}_{rs}-U^{ij}_{rs}(t)$ *между тензором* $U^{ij}_{rs}(t+dt)$, *параллельно перенесенным из точки* $t+dt$ *в точку* t, *и тензором* $U^{ij}_{rs}(t)$.

Очевидно, DU^{ij}_{rs} совпадает с тем выражением, которое в правой части (96.5) добавляется к $U^{ij}_{rs}(t)$. Действительно, из (96.5) видно, что это выражение лишь на бесконечно малую высшего порядка отличается от разности $\tilde{U}^{ij}_{rs}-U^{ij}_{rs}(t)$ (т. е. составляет главную часть этой разности) и в то же время линейно зависит от dt (вместе с $dU^{ij}_{rs}(t)$ и $dx^k(t)$). Итак,

$$DU^{ij}_{rs}(t)=dU^{ij}_{rs}(t)+\\ +\{\Gamma^i_{kp}U^{pj}_{rs}(t)+\Gamma^j_{kp}U^{ip}_{rs}(t)-\Gamma^p_{kr}U^{ij}_{ps}(t)-\Gamma^p_{ks}U^{ij}_{rp}(t)\}\,dx^k. \quad (96.6)$$

Совершенно аналогично мы приходим к формуле абсолютного дифференциала и в случае самого общего тензора:

$$DU^{i_1i_2\ldots i_u}_{r_1r_2\ldots r_v}=dU^{i_1i_2\ldots i_u}_{r_1r_2\ldots r_v}+\{\Gamma^{i_1}_{kp}U^{pi_2\ldots i_u}_{r_1r_2\ldots r_v}+\\ +\Gamma^{i_2}_{kp}U^{i_1p\ldots i_u}_{r_1r_2\ldots r_v}+\ldots+\Gamma^{i_u}_{kp}U^{i_1i_2\ldots p}_{r_1r_2\ldots r_v}-\Gamma^p_{kr_1}U^{i_1i_2\ldots i_u}_{pr_2\ldots r_v}-\\ -\Gamma^p_{kr_2}U^{i_1i_2\ldots i_u}_{r_1p\ldots r_v}-\ldots-\Gamma^p_{kr_v}U^{i_1i_2\ldots i_u}_{r_1r_2\ldots p}\}\,dx^k. \quad (96.7)$$

Здесь $U^{i_1i_2\ldots i_u}_{r_1r_2\ldots r_v}$ — тензорное поле, заданное, по крайней мере, вдоль рассматриваемого пути. При выводе нужно воспользоваться конечно, вместо формулы параллельного пересечения (95.10) общей формулой (95.13).

Таким образом, абсолютный дифференциал тензора (тоже тензор) имеет координаты, которые вычисляются следующим образом: берутся дифференциалы координат данного тензора и к ним приписываются дополнительные члены с участием объекта связности, по одному для каждого индекса тензора. Закон составления этих членов ясен из формулы (96.7).

Впрочем, он был описан и словесно в предыдущем параграфе в связи с формулой параллельного перенесения тензора. Это описание вполне применимо и теперь, лишь с изменением знаков всех членов на обратные.

В частном случае, когда тензор U лишен индексов и является просто инвариантом, так что вдоль пути задано скалярное поле $U(t)$, дополнительные члены в (96.7) отсутствуют, и абсолютный дифференциал совпадает с обыкновенным:

$$DU(t)=dU(t). \quad (96.8)$$

Для тензора, один раз контравариантного, формула (96.7) принимает вид

$$DU^i(t) = dU^i(t) + \Gamma^i_{kp} U^p(t)\, dx^k. \qquad (96.9)$$

Аналогичным образом для тензора, один раз ковариантного:

$$DU_r(t) = dU_r(t) - \Gamma^p_{kr}\, U_p(t)\, dx^k. \qquad (96.10)$$

Можно сказать, что в общем случае формулы (96.7) для каждого верхнего индекса составляется дополнительный член по образцу (96.9) и для каждого нижнего — по образцу (96.10), причем каждый раз все остальные индексы тензора переписываются без изменений.

Параллельное перенесение векторов, а следовательно, и тензоров, имеющее место в пространстве аффинной связности L_n, обладает инвариантностью относительно выбора координатной системы. Поэтому наше построение абсолютного дифференциала $DU^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v}$, проведенное с помощью параллельного перенесения тензоров, также обладает инвариантностью, т. е. приводит всегда к одному и тому же тензору, независимо от той координатной системы x^i, в которой проводились выкладки.

Но для желающих можно проверить этот факт и прямым подсчетом, исходя непосредственно из формулы (96.7).

Мы хотим показать, что величины $DU^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v}$, *составленные по формуле* (96.7), *преобразуются по тензорному закону при переходе от координатной системы* x^i *к* $x^{i'}$.

Для этой цели запишем закон преобразования тензора $U^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v}$:

$$U^{i_1 i_2 \ldots i_u}_{r_1 r_2 \ldots r_v} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial x^{i'_2}} \cdots \frac{\partial x^{i_u}}{\partial x^{i'_u}} \frac{\partial x^{r'_1}}{\partial x^{r_1}} \frac{\partial x^{r'_2}}{\partial x^{r_2}} \cdots \frac{\partial x^{r'_v}}{\partial x^{r_v}}\, U^{i'_1 i'_2 \ldots i'_u}_{r'_1 r'_2 \ldots r'_v}. \qquad (96.11)$$

Мы пишем закон преобразования для перехода от штрихованных координат к нештрихованным, что ничего не меняет по существу, а для выкладки будет удобнее.

Составим теперь $DU^{i_1 i_2 \ldots i_u}_{r_1 r_2 \ldots r_v}$ по формуле (96.7), причем вычисляем дифференциал $dU^{i_1 i_2 \ldots i_u}_{r_1 r_2 \ldots r_v}$, используя выражение (96.11).

Все полученные при этом члены разобьем на три группы. Во-первых, запишем член, полученный при дифференцировании множителя $U^{i'_1 i'_2 \ldots i'_u}_{r'_1 r'_2 \ldots r'_v}$ в (96.11):

$$\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \cdots \frac{\partial x^{r'_v}}{\partial x^{r_v}}\, dU^{i'_1 \ldots i'_u}_{r'_1 \ldots r'_v}. \qquad (96.12)$$

Во-вторых, для каждого верхнего индекса, например, i_1, мы выделяем член, полученный дифференцированием соответствующего множителя в (96.11), в данном случае $\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}$, причем этот член объединяем с дополнительным членом в (96.7), отвечающим этому же индексу. Получим для i_1:

$$\left(d\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\right)\frac{\partial x^{i_2}}{\partial x^{i'_2}}\cdots\frac{\partial x^{r'_v}}{\partial x^{r_v}}U^{i'_1\ldots i'_u}_{r'_1\ldots r'_v}+\Gamma^{i_1}_{kp}U^{p\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}dx^k \tag{96.13}$$

и аналогично для каждого верхнего индекса. В-третьих, поступая совершенно так же и с нижними индексами, получаем, например, для r_1, выражение

$$\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\cdots\left(d\frac{\partial x^{r'_1}}{\partial x^{r_1}}\right)\cdots\frac{\partial x^{r'_v}}{\partial x^{r_v}}U^{i'_1\ldots i'_u}_{r'_1\ldots r'_v}-\Gamma^{p}_{kr_1}U^{i_1\ldots i_u}_{p\ldots r_v} \tag{96.14}$$

и аналогично для каждого нижнего индекса. Очевидно, выражение (96.12), сложенное с выражениями (96.13) для всех верхних индексов и с выражениями (96.14) для всех нижних индексов, дает нам $DU^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}$. Теперь мы должны заняться преобразованием выражений (96.13) и (96.14), *пользуясь законом преобразования* Γ^k_{ij}. В этом и будет заключаться принципиальная часть нашей выкладки.

Перепишем (96.13), заменяя в первом члене $d\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}$ через $\frac{\partial^2 x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}\partial x^{k'}}dx^{k'}$, а во втором члене dx^k через $\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}dx^{k'}$. Кроме того, заменяем $U^{p\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}$ по формуле (96.11), причем индекс суммирования i'_1 в первом множителе обозначаем p'. Получим:

$$\frac{\partial x^{i_2}}{\partial x^{i'_2}}\cdots\frac{\partial x^{r'_v}}{\partial x^{r_v}}\left(\frac{\partial^2 x^{i_1}}{\partial x^{p'}\partial x^{k'}}+\Gamma^{i_1}_{kp}\frac{\partial x^p}{\partial x^{p'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\right)U^{p'\ldots i'_u}_{r'_1\ldots r'_v}dx^{k'}.$$

Пользуясь теперь законом преобразования Γ^k_{ij} в виде (89.7), мы заменяем скобку выражением $\Gamma^{i'_1}_{p'k'}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}$, и окончательно (96.13) принимает вид

$$\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\frac{\partial x^{i_2}}{\partial x^{i'_2}}\cdots\frac{\partial x^{r'_v}}{\partial x^{r_v}}\Gamma^{i'_1}_{p'k'}U^{p'\ldots i'_u}_{r'_1\ldots r'_v}dx^{k'}. \tag{96.15}$$

Аналогичным образом преобразуем выражение (96.14), заменяя $d\frac{\partial x^{r_1'}}{\partial x^{r_1}}$ через $\frac{\partial^2 x^{r_1'}}{\partial x^{r_1}\partial x^k}dx^k$, обозначая индекс суммирования r_1' через p' и выражая $U_{p\ldots r_v}^{i_1\ldots i_u}$ согласно (96.11). Получим:

$$\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i_1'}}\cdots\frac{\partial x^{i_u}}{\partial x^{i_u'}}\frac{\partial x^{r_2'}}{\partial x^{r_2}}\cdots\frac{\partial x^{r_v'}}{\partial x^{r_v}}\left(\frac{\partial^2 x^{p'}}{\partial x^{r_1}\partial x^k}-\Gamma^p_{kr_1}\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^p}\right)U_{p'\ldots r_v'}^{i_1'\ldots i_u'}dx^k.$$

Множители перед скобкой те же, что и в (96.11), с пропуском лишь $\frac{\partial x^{r_1'}}{\partial x^{r_1}}$. Пользуясь законом преобразования Γ^k_{ij} в форме (89.8), мы можем заменить скобку через $-\Gamma^{p'}_{k'r_1'}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^{r_1'}}{\partial x^{r_1}}$, после чего получаем окончательно:

$$-\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i_1'}}\cdots\frac{\partial x^{r_v'}}{\partial x^{r_v}}\Gamma^{p'}_{k'r_1'}U_{p'\ldots r_v'}^{i_1'\ldots i_u'}dx^{k'}. \qquad (96.16)$$

Здесь $dx^{k'}$ появился в результате объединения множителей dx^k и $\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}$ с последующим суммированием по k. Множители перед $\Gamma^{p'}_{k'r_1'}$ теперь те же, что и в (96.11), так как имевшийся пробел заполнен множителем $\frac{\partial x^{r_1'}}{\partial x^{r_1}}$. По самому ходу нашей выкладки выражение (96.12), выражения (96.15) для каждого верхнего индекса и выражения (96.16) для каждого нижнего индекса дают те слагаемые, на которые распался $DU_{r_1\ldots r_v}^{i_1\ldots i_u}$. С другой стороны, вынося за скобки общие во всех этих выражениях множители $\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i_1'}}\cdots\frac{\partial x^{r_v'}}{\partial x^{r_v}}$, мы получаем в скобках $DU_{r_1'\ldots r_v'}^{i_1'\ldots i_u'}$, составленный в точности по формуле (96.7) (только все индексы штрихованные). В результате

$$DU_{r_1\ldots r_v}^{i_1\ldots i_u}=\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i_1'}}\cdots\frac{\partial x^{r_v'}}{\partial x^{r_v}}DU_{r_1'\ldots r_v'}^{i_1'\ldots i_u'}. \qquad (96.17)$$

Это значит, что тензорный закон преобразования (96.11) в точности переносится и на абсолютный дифференциал рассматриваемого тензора. *Абсолютный дифференциал тензора представляет собой, таким образом, тензор того же строения.*

Мы рассматривали до сих пор тензорное поле, заданное вдоль некоторого пути, и абсолютный дифференциал $DU^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}$ брали вдоль этого пути. Если тензорное поле задано во всем пространстве или, по крайней мере, в некоторой n-мерной его области, то абсолютный дифференциал тензора можно брать вдоль любого пути в этой области. При этом, так как координаты тензора в данной координатной системе будут функциями точки

$$U^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}=U^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}(x^1,\ \ldots,\ x^n), \tag{96.18}$$

то

$$dU^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}=\frac{\partial U^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}}{\partial x^k}\,dx^k \tag{96.19}$$

и основная формула (96.7) принимает вид

$$DU^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}=\nabla_k U^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}\,dx^k, \tag{96.20}$$

где через $\nabla_k U^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}$ обозначены коэффициенты при dx^k в правой части (96.7) после подстановки туда $dU^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}$ из (96.19):

$$\nabla_k U^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}=\frac{\partial}{\partial x^k}U^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}+\Gamma^{i_1}_{kp}U^{pi_2\ldots i_u}_{r_1r_2\ldots r_v}+\ldots+\Gamma^{i_u}_{kp}U^{i_1i_2\ldots p}_{r_1r_2\ldots r_v}-$$
$$-\Gamma^{p}_{kr_1}U^{i_1i_2\ldots i_u}_{pr_2\ldots r_v}-\ldots-\Gamma^{p}_{kr_v}U^{i_1i_2\ldots i_u}_{r_1r_2\ldots p}. \tag{96.21}$$

Эти коэффициенты образуют тензор, имеющий один дополнительный ковариантный индекс сравнительно с тензором $U^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}$ (индекс дифференцирования k). В самом деле, вставим в (96.17) разложение абсолютного дифференциала (96.20)) как в старой, так и в новой координатной системе. Получим:

$$\nabla_k U^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}\,dx^k=\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\ldots\frac{\partial x^{r'_v}}{\partial x^{r_v}}\nabla_{k'}U^{i'_1\ldots i'_u}_{r'_1\ldots r'_v}\,dx^{k'}.$$

Вставим в правую часть $\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}dx^k$ вместо $dx^{k'}$ и сравним коэффициенты при dx^k в левой и правой частях. Так как dx^k сейчас у нас произвольны, то равенство должно удовлетворяться тождественно относительно dx^k, и эти коэффициенты должны быть равны. Получаем:

$$\nabla_k U^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}=\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\ldots\frac{\partial x^{r'_v}}{\partial x^{r_v}}\nabla_{k'}U^{i'_1\ldots i'_u}_{r'_1\ldots r'_v}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}. \tag{96.22}$$

Легко заметить, что для $\nabla_k U^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v}$ имеет место тензорный закон преобразования при контравариантных индексах $i_1, \ldots, i_u$ и ковариантных индексах $k, r_1, \ldots, r_v$. Тензор $\nabla_k U^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v}$ называется *абсолютной (или ковариантной) производной* тензора $U^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v}$. Впрочем, мы иногда будем называть *абсолютными производными* и отдельные координаты тензора $\nabla_k U^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v}$. Очевидно, абсолютные производные тензора $U^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v}$ играют по отношению к его абсолютному дифференциалу ту же роль, как обыкновенные частные производные по отношению к обыкновенному полному дифференциалу.

Рассмотрим частные случаи. Если нам дано скалярное поле $U(x^1, \ldots, x^n)$ (тензор лишен индексов), то в (96.21) дополнительные члены отсутствуют, и мы получаем абсолютную производную

$$\nabla_k U = \frac{\partial U}{\partial x^k}. \qquad (96.23)$$

Конечно, легко проверить и непосредственно, что $\frac{\partial U}{\partial x^k}$ образуют один раз ковариантный тензор. Такой тензор мы будем называть *градиентом скалярного поля U*.

Далее, пусть дано поле один раз контравариантного тензора U^i. Тогда

$$\nabla_k U^i = \frac{\partial U^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kp} U^p, \qquad (96.24)$$

абсолютная производная представляет собой тензор, один раз ковариантный и один раз контравариантный.

Наконец, пусть дано поле одноковариантного тензора U_r. Тогда

$$\nabla_k U_r = \frac{\partial U_r}{\partial x^k} - \Gamma^p_{kr} U_p. \qquad (96.25)$$

Мы получаем два раза ковариантный тензор. Если тензор U_r — градиент, $U_r = \nabla_r U = \frac{\partial U}{\partial x^r}$, то получаем:

$$\nabla_k \nabla_r U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^k \, \partial x^r} - \Gamma^p_{kr} \frac{\partial U}{\partial x^p}. \qquad (96.26)$$

Если пространство аффинной связности L_n является просто аффинным пространством A_n (в частности, евклидовым пространством R_n), то *в аффинной координатной системе* все $\Gamma^k_{ij} = 0$, дополнительные члены в формулах (96.7), (96.21) пропадают, и мы имеем:

$$DU^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v} = dU^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v}, \qquad (96.27)$$

$$\nabla_k U^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v} = \frac{\partial}{\partial x^k} U^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v}. \qquad (96.28)$$

Другими словами, абсолютный дифференциал тензора совпадает с обыкновенным дифференциалом, а абсолютные производные — с обыкновенными частными производными. В частности, пусть нам задано вдоль кривой $x^i = x^i(t)$ поле тензора $\xi^i(t)$, а следовательно, и векторное поле $\xi(t) = \xi^i(t)\,\mathbf{e}_i$. Тогда абсолютный дифференциал $D\xi^i$ отвечает вектору

$$D\xi^i(t)\,\mathbf{e}_i = d\xi^i(t)\,\mathbf{e}_i = d\,(\xi^i(t)\,\mathbf{e}_i) = d\xi(t).$$

Таким образом, *абсолютное дифференцирование тензора ξ^i означает дифференцирование соответствующего вектора ξ в прямом геометрическом смысле этого слова*:

$$d\xi(t) = \xi'(t)\,dt, \quad \text{где } \xi'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\xi(t)}{\Delta t}.$$

Результат был выведен в аффинных координатах в A_n (или в R_n), но в силу тензорного характера абсолютного дифференциала $D\xi^i$ он дает координаты того же вектора $d\xi$ и в любой криволинейной системе координат (в локальном репере, § 76).

Не нужно забывать, что упрощенные формулы (96.27), (96.28) верны лишь в аффинных координатах. Если рассматривать аффинное пространство A_n *в криволинейных координатах*, то приходится пользоваться общими формулами (96.7), (96.21), так как Γ_{ij}^k отличны от нуля.

§ 97. Техника абсолютного дифференцирования

Чтобы свободно обращаться с операцией абсолютного дифференцирования, мы должны установить правила, по которым она комбинируется с операциями тензорной алгебры. Другими словами, мы должны дать правила, по которым мы сможем находить абсолютные дифференциалы от суммы тензоров, от произведения тензоров и от свернутого тензора. Говоря о тензорах, мы имеем в виду тензорные поля, заданные, по крайней мере, вдоль того пути, по которому берется абсолютный дифференциал.

Пусть тензор $W_{r_1 \ldots r_v}^{i_1 \ldots i_u}$ представляет собой сумму двух или нескольких тензоров того же строения

$$W_{r_1 \ldots r_v}^{i_1 \ldots i_u} = U_{r_1 \ldots r_v}^{i_1 \ldots i_u} + V_{r_1 \ldots r_v}^{i_1 \ldots i_u}. \qquad (97.1)$$

Тогда

$$DW_{r_1 \ldots r_v}^{i_1 \ldots i_u} = DU_{r_1 \ldots r_v}^{i_1 \ldots i_u} + DV_{r_1 \ldots r_v}^{i_1 \ldots i_u}. \qquad (97.2)$$

Действительно, выпишем формулу (96.7) для тензора $U_{r_1 \ldots r_v}^{i_1 \ldots i_u}$ и