Другими словами, абсолютный дифференциал тензора совпадает с обыкновенным дифференциалом, а абсолютные производные — с обыкновенными частными производными. В частности, пусть нам задано вдоль кривой $x^i = x^i(t)$ поле тензора $\xi^i(t)$, а следовательно, и векторное поле $\xi(t) = \xi^i(t)\,\mathbf{e}_i$. Тогда абсолютный дифференциал $D\xi^i$ отвечает вектору

$$D\xi^i(t)\,\mathbf{e}_i = d\xi^i(t)\,\mathbf{e}_i = d(\xi^i(t)\,\mathbf{e}_i) = d\xi(t).$$

Таким образом, *абсолютное дифференцирование тензора* ξ^i *означает дифференцирование соответствующего вектора* ξ *в прямом геометрическом смысле этого слова*:

$$d\xi(t) = \xi'(t)\,dt, \quad \text{где } \xi'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\xi(t)}{\Delta t}.$$

Результат был выведен в аффинных координатах в A_n (или в R_n), но в силу тензорного характера абсолютного дифференциала $D\xi^i$ он дает координаты того же вектора $d\xi$ и в любой криволинейной системе координат (в локальном репере, § 76).

Не нужно забывать, что упрощенные формулы (96.27), (96.28) верны лишь в аффинных координатах. Если рассматривать аффинное пространство A_n *в криволинейных координатах*, то приходится пользоваться общими формулами (96.7), (96.21), так как Γ^k_{ij} отличны от нуля.

§ 97. Техника абсолютного дифференцирования

Чтобы свободно обращаться с операцией абсолютного дифференцирования, мы должны установить правила, по которым она комбинируется с операциями тензорной алгебры. Другими словами, мы должны дать правила, по которым мы сможем находить абсолютные дифференциалы от суммы тензоров, от произведения тензоров и от свернутого тензора. Говоря о тензорах, мы имеем в виду тензорные поля, заданные, по крайней мере, вдоль того пути, по которому берется абсолютный дифференциал.

Пусть тензор $W^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v}$ представляет собой сумму двух или нескольких тензоров того же строения

$$W^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v} = U^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v} + V^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v}. \tag{97.1}$$

Тогда

$$DW^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v} = DU^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v} + DV^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v}. \tag{97.2}$$

Действительно, выпишем формулу (96.7) для тензора $U^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v}$ и совершенно такую же формулу для тензора $V^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}$:

$$DU^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}=dU^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}+\left\{\Gamma^{i_1}_{kp}U^{pi_2\ldots i_u}_{r_1r_2\ldots r_v}+\ldots-\Gamma^{p}_{kr_1}U^{i_1i_2\ldots i_u}_{pr_2\ldots r_v}-\ldots\right\}dx^k,$$

$$DV^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}=dV^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}+\left\{\Gamma^{i_1}_{kp}V^{pi_2\ldots i_u}_{r_1r_2\ldots r_v}+\ldots-\Gamma^{p}_{kr_1}V^{i_1i_2\ldots i_u}_{pr_2\ldots r_v}-\ldots\right\}dx^k.$$

Складываем эти формулы почленно, объединяя соответствующие члены их правых частей и заменяя везде сумму тензоров U и V через W согласно (97.1). Кроме того, учитываем, что

$$dU^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}+dV^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}=dW^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}.$$

В результате в правой части мы получаем для W в точности такое же выражение, какие были выписаны для U и V, т. е. $DW^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}$. Итак,

$$DU^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}+DV^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}=DW^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v},$$

а это нам и требовалось доказать. Мы приходим к правилу дифференцирования суммы тензоров:

$$D\left(U^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}+V^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}\right)=DU^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}+DV^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}. \qquad (97.3)$$

Пусть теперь тензор $W^{i_1\ldots i_uj_1\ldots j_x}_{r_1\ldots r_vs_1\ldots s_y}$ представляет собой произведение двух тензоров:

$$W^{i_1\ldots i_uj_1\ldots j_x}_{r_1\ldots r_vs_1\ldots s_y}=U^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}V^{j_1\ldots j_x}_{s_1\ldots s_y}. \qquad (97.4)$$

Тогда

$$DW^{i_1\ldots i_uj_1\ldots j_x}_{r_1\ldots r_vs_1\ldots s_y}=DU^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}V^{j_1\ldots j_x}_{s_1\ldots s_y}+U^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}DV^{j_1\ldots j_x}_{s_1\ldots s_y}. \qquad (97.5)$$

Другими словами, *абсолютный дифференциал произведения тензоров получается по обычному правилу: абсолютный дифференциал первого множителя, умноженный на второй множитель, плюс первый множитель, умноженный на абсолютный дифференциал второго.* При этом существен именно такой порядок перемножения. В формуле он обеспечен расстановкой индексов (в каком же порядке перемножать *координаты* тензоров, например, $DU^{i_1\ldots}_{r\ldots}$ и $V^{j_1\ldots}_{s_1\ldots}$, конечно, безразлично).

Переходим к выводу формулы (97.5). Запишем развернутое выражение абсолютного дифференциала в ее левой части. В него войдет прежде всего обыкновенный дифференциал

$$dW^{i_1\ldots j_x}_{r_1\ldots s_y}=dU^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}V^{j_1\ldots j_x}_{s_1\ldots s_y}+U^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}dV^{j_1\ldots j_x}_{s_1\ldots s_y}, \qquad (97.6)$$

а затем дополнительные члены, по одному для каждого индекса. *Объединим первый член правой части* (97.6) *с теми дополнительными членами, которые отвечают индексам* $i_1 \ldots i_u, r_1 \ldots r_v$, *т. е. индексам, «снятым» с первого множителя.* Эти дополнительные члены будут составлены по схеме (96.7). Получим:

$$dU^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}V^{j_1\ldots j_x}_{s_1\ldots s_y}+$$
$$+\left(\Gamma^{i_1}_{kp}W^{pi_2\ldots i_uj_1\ldots j_x}_{r_1r_2\ldots r_vs_1\ldots s_y}+\ldots-\Gamma^{p}_{kr_1}W^{i_1i_2\ldots i_uj_1\ldots j_x}_{pr_2\ldots r_vs_1\ldots s_y}-\ldots\right)dx^k.$$

Члены в скобке составлены по очереди для индексов $i_1, \ldots, i_u, r_1, \ldots, r_v$, так что индексы $j_1, \ldots, j_x, s_1, \ldots, s_y$ во всех случаях переписываются без изменения. Заменяя W произведением U на V согласно (97.4) и вынося за скобку общий для всех членов множитель $V^{j_1\ldots j_x}_{s_1\ldots s_y}$, получим:

$$\left\{dU^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}+\left(\Gamma^{i_1}_{kp}U^{pi_2\ldots i_u}_{r_1r_2\ldots s_v}+\ldots-\Gamma^{p}_{kr_1}U^{i_1i_2\ldots i_u}_{pr_2\ldots r_v}-\ldots\right)dx^k\right\}V^{j_1\ldots j_x}_{s_1\ldots s_y}.$$

Но в фигурной скобке стоит, очевидно, $DU^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}$, так что мы получаем первый член правой части в (97.5).

Совершенно аналогично, *объединяя второй член правой части* (97.6) *с теми дополнительными членами, которые отвечают индексам* $j_1, \ldots, j_x, s_1, \ldots, s_y$, мы получим второй член правой части (97.5). Этим формула (97.5) доказана.

Абсолютный дифференциал произведения любого числа тензоров вычисляется следующим образом: множители этого произведения поочередно заменяются своими абсолютными дифференциалами с сохранением прежнего места в произведении, и полученные результаты складываются. Это легко доказать, переходя от N к $N+1$ (где N — число множителей в произведении) путем применения формулы (97.5).

Теперь переходим к абсолютному дифференцированию *свернутого тензора*. Рассмотрим тензор $U^{i_2\ldots i_u}_{r_2\ldots r_v}$, полученный свертыванием тензора $U^{i_1i_2\ldots i_u}_{r_1r_2\ldots r_v}$, например, по первому верхнему и первому нижнему индексам:

$$U^{i_2\ldots i_u}_{r_2\ldots r_v}=U^{si_2\ldots i_u}_{sr_2\ldots r_v}.$$

Запись абсолютного дифференциала от свернутого тензора $DU^{si_2\ldots i_u}_{sr_2\ldots r_v}$ является, в сущности, двусмысленной: неясно, произведено ли здесь сначала свертывание, а от результата взят абсолютный дифференциал, или сначала взят абсолютный дифференциал $DU^{i_1i_2\ldots i_u}_{r_1r_2\ldots r_v}$, а затем произведено свертывание по индексам i_1, r_1. Мы покажем, однако, что *оба истолкования приводят к одному и тому же выражению, т. е. операция свертывания перестановочна с операцией абсолютного дифференцирования.* В этом и будет заключаться наш результат.

Начнем с вычисления $DU^{si_2\ldots i_u}_{sr_2\ldots r_v}$, истолкованного во втором смысле. Тогда мы должны положить в формуле (96.7) $i_1=r_1=s$ и по s произвести суммирование. Покажем, что при этом в правой части взаимно уничтожатся дополнительные члены, отвечающие индексам i_1 и r_1. В самом деле, эти члены суть

$$\left(\Gamma^{i_1}_{kp}U^{pi_2\ldots i_u}_{r_1r_2\ldots r_v}-\Gamma^{p}_{kr_1}U^{i_1i_2\ldots i_u}_{pr_2\ldots r_v}\right)dx^k,$$

а после того как мы положим $i_1=r_1=s$, они примут вид

$$\left(\Gamma^{s}_{kp}U^{pi_2\ldots i_u}_{sr_2\ldots r_v}-\Gamma^{p}_{ks}U^{si_2\ldots i_u}_{pr_2\ldots r_v}\right)dx^k,$$

т. е. взаимно уничтожаются, так как в скобке уменьшаемое равно вычитаемому (разница только в обозначениях индексов суммирования: p вместо s, и наоборот).

В результате формула (96.7) принимает вид

$$DU^{si_2\ldots i_u}_{sr_2\ldots r_v}=dU^{si_2\ldots i_u}_{sr_2\ldots r_v}+\Big\{\Gamma^{i_2}_{kp}U^{sp\ldots i_u}_{sr_2\ldots r_v}+\ldots+\Gamma^{i_u}_{kp}U^{si_2\ldots p}_{sr_2\ldots r_v}-$$
$$-\Gamma^{p}_{kr_2}U^{si_2\ldots i_u}_{sp\ldots r_v}-\ldots-\Gamma^{p}_{kr_v}U^{si_2\ldots i_u}_{sr_2\ldots p}\Big\}dx^k.$$

В левой части мы произвели свертывание в абсолютном дифференциале $DU^{i_1i_2\ldots i_u}_{r_1r_2\ldots r_v}$. Присмотревшись же к правой части, мы замечаем, что она представляет собой абсолютный дифференциал от свернутого тензора $U^{si_2\ldots i_u}_{sr_2\ldots r_v}$, составленный по общей схеме (96.7). При этом индекс s, конечно, в счет не идет — по нему произведено суммирование — и индексами здесь служат лишь $i_2, \ldots, i_u$; $r_2, \ldots, r_v$. Им как раз и отвечают сохранившиеся дополнительные члены. Итак, полученное равенство можно переписать в виде

$$DU^{si_2\ldots i_u}_{sr_2\ldots r_v}=D\left(U^{si_2\ldots i_u}_{sr_2\ldots r_v}\right), \tag{97.7}$$

где в левой части свертывание производится после дифференцирования, а в правой — до дифференцирования, что отмечено скобкой. Итак, *оба истолкования записи* $D^{si_2\ldots i_u}_{sr_2\ldots r_v}$ *имеют по существу один и тот же смысл.* А это мы и хотели установить.

В технике абсолютного дифференцирования этот результат находит наибольшие применения в случае свертывания между собой двух или нескольких тензоров. Пусть, например, требуется найти $D(a_{ij}\xi^i\eta^j)$, где a_{ij}, ξ^p, η^q — некоторые тензорные поля. Абсолютный дифференциал берется здесь от выражения $a_{ij}\xi^i\eta^j$, которое нужно понимать, как произведение наших тензоров $a_{ij}\xi^p\eta^q$, свернутое затем по индексам i и p, j и q. Но свертывание можно выполнить и после абсолютного дифференцирования. В результате мы должны продифференцировать $a_{ij}\xi^p\eta^q$, как произведение тензоров, а затем выполнить свертывание. Получаем:

$$D(a_{ij}\xi^i\eta^j) = (Da_{ij})\,\xi^i\eta^j + a_{ij}(D\xi^i)\,\eta^j + a_{ij}\xi^i D\eta^j. \tag{97.8}$$

Таким образом, правило дифференцирования произведения тензоров формально сохраняется и при наличии свертывания.

Заметим, что в левой части равенства, мы имеем (в нашем примере) абсолютный дифференциал от инварианта, так что с равным правом можем писать $d(a_{ij}\xi^i\eta^j)$.

Полученные нами в этом параграфе правила абсолютного дифференцирования (97.3), (97.5), (97.7) автоматически переносятся и на абсолютные производные простой заменой знака D на знак ∇_k.

Действительно, заменяя в любой из этих формул символы абсолютного дифференциала D через $dx^k\nabla_k$ согласно (96.20) и принимая во внимание, что дифференциалы dx^k совершенно произвольны, мы имеем право приравнять коэффициенты при dx^k в правой и левой частях формулы, а это и означает замену символа D символом ∇_k.

В заключение нужно вернуться *к связи между параллельным перенесением и абсолютным дифференцированием*. Мы начали с параллельного перенесения и на его основе установили абсолютное дифференцирование. Этот путь геометрически наиболее поучителен. Однако возможен обратный, хотя и весьма формальный, но зато короткий способ изложения, а именно, задавшись объектом связности Γ^i_{jk}, можно *определить* абсолютный дифференциал непосредственно формулой (96.7), показать его тензорный характер (так, как это было у нас сделано), установить технику абсолютного дифференцирования, а затем *определить* параллельное перенесение тензора $U^{i_1 \dots i_u}_{r_1 \dots r_v}$ вдоль произвольного пути условием

$$DU^{i_1 \dots i_u}_{r_1 \dots r_v} = 0. \tag{97.9}$$

Или подробно: *будем говорить, что тензор $U^{i_1 \dots i_u}_{r_1 \dots r_v}$, заданный в каждой точке некоторого пути, параллельно переносится вдоль него, если абсолютный дифференциал этого тензора при любом бесконечно малом смещении вдоль пути равен нулю.*

Легко видеть, что это *определение равносильно прежнему*. Действительно, приравнивая нулю абсолютный дифференциал $DU^{i_1 \dots i_u}_{r_1 \dots r_v}$, записанный согласно (96.7), мы возвращаемся к формуле параллельного перенесения (95.13). Этого, конечно, и нужно было ожидать, так как абсолютный дифференциал есть главная линейная часть приращения тензора *по сравнению со случаем его параллельного перенесения на данном бесконечно малом участке пути*. Поэтому обращение абсолютного дифференциала в нуль естественно означает параллельное перенесение тензора. В частности, приравнивая нулю $D\xi^i$:

$$D\xi^i = d\xi^i + \Gamma^i_{kp}\xi^p\,dx^k,$$

мы получаем формулу параллельного перенесения вектора: $d\xi^i = -\Gamma^i_{kp}\xi^p\,dx^k$.

Формальная характеристика параллельного перенесения (97.9) удобна для разного рода выкладок. Так, например, легко можно получить теорему: *при одновременном параллельном перенесении нескольких тензоров по данному пути параллельно переносятся и тензоры, полученные из них операциями тензорной алгебры.*

В самом деле, пусть, например,

$$W^{ijk}_{rs} = U^{ij}_r V^k_s, \tag{97.10}$$

причем тензоры U, V параллельно переносятся вдоль данного пути. Это означает, что

$$DU^{ij}_r = 0, \quad DV^k_s = 0.$$

Отсюда следует:

$$D(U^{ij}_r V^k_s) = DU^{ij}_r \cdot V^k_s + U^{ij}_r \cdot DV^k_s = 0,$$

т. е. произведение тензоров $U^{ij}_r V^k_s$ тоже переносится параллельно. Аналогичным образом легко показать, что параллельно переносятся и суммы параллельно переносимых тензоров и тензоры, полученные их свертыванием.

Конечно, эти теоремы нетрудно получить и непосредственно из определения параллельного перенесения тензора (§ 95).

§ 98. Абсолютное дифференцирование в римановом пространстве V_n

Все сказанное в §§ 96, 97 справедливо, конечно и для связности Γ^k_{ij} в римановом пространстве. Но при этом абсолютное дифференцирование приобретает и некоторые новые свойства. Прежде всего вычислим абсолютную производную от *метрического тензора* g_{rs} *по общей схеме* (96.21):

$$\nabla_k g_{rs} = \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^k} - \Gamma^p_{kr} g_{ps} - \Gamma^p_{ks} g_{rp}.$$

Пользуясь (94.4), мы замечаем, что

$$\nabla_k g_{rs} = 0. \tag{98.1}$$

Таким образом, абсолютная производная метрического тензора тождественно равна нулю. Тем самым тождественно равен нулю и