абсолютного дифференциала в нуль естественно означает параллельное перенесение тензора. В частности, приравнивая нулю $D\xi^i$:

$$D\xi^i = d\xi^i + \Gamma^i_{kp}\xi^p\,dx^k,$$

мы получаем формулу параллельного перенесения вектора: $d\xi^i = -\Gamma^i_{kp}\xi^p\,dx^k$.

Формальная характеристика параллельного перенесения (97.9) удобна для разного рода выкладок. Так, например, легко можно получить теорему: *при одновременном параллельном перенесении нескольких тензоров по данному пути параллельно переносятся и тензоры, полученные из них операциями тензорной алгебры.*

В самом деле, пусть, например,

$$W^{ijk}_{rs} = U^{ij}_r V^k_s, \tag{97.10}$$

причем тензоры U, V параллельно переносятся вдоль данного пути. Это означает, что

$$DU^{ij}_r = 0, \quad DV^k_s = 0.$$

Отсюда следует:

$$D(U^{ij}_r V^k_s) = DU^{ij}_r \cdot V^k_s + U^{ij}_r \cdot DV^k_s = 0,$$

т. е. произведение тензоров $U^{ij}_r V^k_s$ тоже переносится параллельно. Аналогичным образом легко показать, что параллельно переносятся и суммы параллельно переносимых тензоров и тензоры, полученные их свертыванием.

Конечно, эти теоремы нетрудно получить и непосредственно из определения параллельного перенесения тензора (§ 95).

§ 98. Абсолютное дифференцирование в римановом пространстве V_n

Все сказанное в §§ 96, 97 справедливо, конечно и для связности Γ^k_{ij} в римановом пространстве. Но при этом абсолютное дифференцирование приобретает и некоторые новые свойства. Прежде всего вычислим абсолютную производную от *метрического тензора* g_{rs} *по общей схеме* (96.21):

$$\nabla_k g_{rs} = \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^k} - \Gamma^p_{kr} g_{ps} - \Gamma^p_{ks} g_{rp}.$$

Пользуясь (94.4), мы замечаем, что

$$\nabla_k g_{rs} = 0. \tag{98.1}$$

Таким образом, абсолютная производная метрического тензора тождественно равна нулю. Тем самым тождественно равен нулю и абсолютный дифференциал метрического тензора:

$$Dg_{rs}=0. \tag{98.2}$$

Рассмотрим теперь поле единичного тензора δ^i_j, считая, что в каждой точке M и в любой координатной системе x^i его координаты определены соотношениями

$$\delta^i_j=\begin{cases} 0 & (i\neq j) \\ 1 & (i=j) \end{cases}. \tag{98.3}$$

Мы знаем, что, действительно, тензорный закон преобразования не меняет этих численных значений. Вычислим абсолютную производную этого тензора:

$$\nabla_k\delta^i_j=\frac{\partial}{\partial x^k}\delta^i_j+\Gamma^i_{kp}\delta^p_j-\Gamma^p_{kj}\delta^i_p.$$

Частная производная от константы δ^i_j дает нуль, а остальные члены в результате суммирования по p приводятся к виду

$$\Gamma^i_{kj}-\Gamma^i_{kj}=0.$$

Итак,

$$\nabla_k\delta^i_j=0, \quad \text{и тем самым } D\delta^i_j=0. \tag{98.4}$$

Этот результат верен, разумеется, не только в римановом пространстве V_n, но и в любом пространстве аффинной связности L_n.

Теперь покажем, что и для контравариантного метрического тензора g^{ij} абсолютный дифференциал тождественно равен нулю:

$$Dg^{ij}=0, \quad \text{или, что то же, } \nabla_k g^{ij}=0. \tag{98.5}$$

Для доказательства запишем основное соотношение, выражающее, что матрицы g_{ij} и g^{ij} взаимно обратные и при перемножении дают единичную матрицу:

$$g^{ip}g_{pj}=\delta^i_j. \tag{98.6}$$

Берем почленно абсолютные дифференциалы (от левой части — как от произведения тензоров, выполняя свертывание по p после дифференцирования):

$$Dg^{ip}\cdot g_{pj}+g^{ip}\cdot Dg_{pj}=D\delta^i_j.$$

В силу (98.2) и (98.4) получаем:

$$Dg^{ip}\cdot g_{pj}=0,$$

т. е. тензор Dg^{ip} равен нулю после опускания индекса p; следовательно, он и сам равен нулю, и (98.5) доказано.

Пусть теперь в римановом пространстве заданы два тензорных поля, например, $V^{i\cdot\cdot}_{\cdot rs}$ и $V^{ir\cdot}_{\cdot\cdot s}$, причем первое получается из второго опусканием индекса r, а следовательно, второе из первого — его поднятием (см. (85.5), (85.6)):

$$V^{i\cdot\cdot}_{\cdot rs} = g_{rp}V^{ip\cdot}_{\cdot\cdot s}, \qquad V^{ir\cdot}_{\cdot\cdot s} = g^{rp}V^{i\cdot\cdot}_{\cdot ps}. \tag{98.7}$$

Берем почленно абсолютные дифференциалы, причем правые части дифференцируются как произведения (с выполнением свертывания после дифференцирования):

$$DV^{i\cdot\cdot}_{\cdot rs} = (Dg_{rp})V^{ip\cdot}_{\cdot\cdot s} + g_{rp}DV^{ip\cdot}_{\cdot\cdot s}, \quad DV^{ir\cdot}_{\cdot\cdot s} = (Dg^{rp})\,V^{i\cdot\cdot}_{\cdot ps} + g^{rp}DV^{i\cdot\cdot}_{\cdot ps}.$$

Так как

$$Dg_{rp} = Dg^{rp} = 0,$$

то мы получаем:

$$DV^{i\cdot\cdot}_{\cdot rs} = g_{rp}DV^{ip\cdot}_{\cdot\cdot s}, \quad DV^{ir\cdot}_{\cdot\cdot s} = g^{rp}DV^{i\cdot\cdot}_{\cdot ps}. \tag{98.8}$$

Формулы (98.8) показывают, что операции опускания и поднятия индексов перестановочны с операцией абсолютного дифференцирования.

Проверим еще при помощи абсолютного дифференцирования известный нам факт, что при одновременном параллельном перенесении векторов ξ^i, η^j по данному пути их скалярное произведение $g_{ij}\xi^i\eta^j$ не меняется. Очевидно,

$$D(g_{ij}\xi^i\eta^j) = (Dg_{ij})\,\xi^i\eta^j + g_{ij}\,(D\xi^i)\,\eta^j + g_{ij}\xi^iD\eta^j = 0,$$

так как Dg_{ij} всегда равен нулю, а $D\xi^i$, $D\xi^j$ равны нулю в силу параллельного перенесения этих векторов. Абсолютный дифференциал от инварианта совпадает с обыкновенным, так что получаем:

$$d(g_{ij}\xi^i\eta^j) = 0, \quad \text{т. е.} \quad g_{ij}\xi^i\eta^j = \text{const},$$

что мы и хотели показать. Мы видим, что геометрический смысл соотношения $Dg_{ij} = 0$ — это неизменность скалярного произведения параллельно переносимых векторов.

Заметим, что в римановом пространстве нетрудно ввести основные понятия векторного анализа по аналогии с обычным пространством.

Так, каждому скалярному полю

$$\varphi = \varphi(x^1, \ldots, x^n)$$

отвечает поле *вектора-градиента*

$$\varphi_i = \nabla_i \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i},$$

который можно задать и контравариантными координатами, подняв индекс i:

$$\varphi^i = g^{ij} \varphi_j.$$

Каждому векторному полю

$$\xi^i = \xi^i (x^1, \ldots, x^n)$$

отвечает *дивергенция* — инвариантное скалярное поле $\nabla_i \xi^i$. Дивергенция от градиента скалярного поля φ называется *оператором Лапласа* от φ:

$$\Delta \varphi = \nabla_i (g^{ij} \varphi_j) = g^{ij} \nabla_i \nabla_j \varphi.$$

Все эти понятия, очевидно, принимают обычный вид, если рассматривать обычное пространство в прямоугольных координатах.

Сложнее обстоит дело с *ротором* векторного поля ξ^i, который в n-мерном случае приходится определить как *бивектор*:

$$\xi_{ij} = \nabla_i \xi_j - \nabla_j \xi_i = \frac{\partial \xi_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x^j},$$

где ξ_i — ковариантные координаты вектора ξ^i. Инвариантное истолкование этого бивектора как вектора v^i возможно лишь *в трехмерном случае*. Оно производится по формулам

$$v^1 = \frac{1}{\sqrt{g}} \xi_{23}, \quad v^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \xi_{31}, \quad v^3 = \frac{1}{\sqrt{g}} \xi_{12},$$

причем мы ограничиваемся координатными системами некоторой данной ориентации.

Следует отметить еще, что в частном случае, *когда риманово пространство является евклидовым*, абсолютный дифференциал в *криволинейных координатах* выглядит по внешнему виду не проще, чем в общем случае риманова пространства. Его более простой характер выступает явно лишь при переходе к *аффинным координатам*. Тогда коэффициенты связности обращаются в нуль, дополнительные члены пропадают и абсолютное дифференцирование дает тот же результат, как и обыкновенное. Для любого тензора, например Z^p_{ij}, мы в этом случае имеем:

$$DZ^p_{ij} = dZ^p_{ij}, \quad \nabla_k Z^p_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^k} Z^p_{ij}.$$

В главе I, рассматривая *обычное евклидово пространство в прямоугольных координатах*, мы вводили абсолютное дифференцирование именно этим путем. Все полученные там тензорные соотношения с участием абсолютных дифференциалов или производных имеют место *и в любых криволинейных координатах*, если, разумеется, выполнять абсолютное дифференцирование так, как в этом случае полагается (с участием Γ_{ij}^{k}). Впрочем, при переходе к криволинейным координатам нужно произвести еще расстановку индексов у тензоров — часть их поместить наверх, — в то время как в главе I мы все индексы писали внизу, пользуясь тем, что в ортонормированном репере в собственно евклидовом пространстве ко- и контравариантные индексы ведут себя одинаково.

§ 99. Кривые в римановом пространстве V_n

В этом параграфе мы ограничимся такими свойствами кривых в римановом пространстве V_n, для которых существенно лишь параллельное перенесение векторов, а метрика не играет роли. Поэтому все сказанное будет справедливо и для кривых в пространстве аффинной связности L_n (только касательное пространство A_n не будет в этом случае евклидовым пространством R_n).

Рассмотрим параметрически заданную кривую

$$x^i = x^i(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \tag{99.1}$$

где x^i предполагаются n раз непрерывно дифференцируемыми функциями параметра, причем производные $\frac{dx^i(t)}{dt}$ ни в одной точке не обращаются в нуль одновременно. В каждой точке кривой составляем касательный вектор ξ^i:

$$\xi^i(t) = \frac{dx^i(t)}{dt}. \tag{99.2}$$

Так как вдоль нашей кривой $\xi^i(t)$ образуют тензорное поле, то в любой ее точке можно вычислить абсолютный дифференциал

$$D\xi^i = d\xi^i + \Gamma_{kp}^{i}\xi^p\,dx^k \tag{99.3}$$

при бесконечно малом смещении из точки t в точку $t+dt$. Разделив (99.3) на dt почленно, получаем:

$$\frac{D\xi^i}{dt} = \frac{d\xi^i}{dt} + \Gamma_{kp}^{i}\xi^p\frac{dx^k}{dt}. \tag{99.4}$$