В главе I, рассматривая *обычное евклидово пространство в прямоугольных координатах*, мы вводили абсолютное дифференцирование именно этим путем. Все полученные там тензорные соотношения с участием абсолютных дифференциалов или производных имеют место *и в любых криволинейных координатах*, если, разумеется, выполнять абсолютное дифференцирование так, как в этом случае полагается (с участием Γ^k_{ij}). Впрочем, при переходе к криволинейным координатам нужно произвести еще расстановку индексов у тензоров — часть их поместить наверх, — в то время как в главе I мы все индексы писали внизу, пользуясь тем, что в ортонормированном репере в собственно евклидовом пространстве ко- и контравариантные индексы ведут себя одинаково.

§ 99. Кривые в римановом пространстве V_n

В этом параграфе мы ограничимся такими свойствами кривых в римановом пространстве V_n, для которых существенно лишь параллельное перенесение векторов, а метрика не играет роли. Поэтому все сказанное будет справедливо и для кривых в пространстве аффинной связности L_n (только касательное пространство A_n не будет в этом случае евклидовым пространством R_n).

Рассмотрим параметрически заданную кривую

$$x^i = x^i(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \tag{99.1}$$

где x^i предполагаются n раз непрерывно дифференцируемыми функциями параметра, причем производные $\frac{dx^i(t)}{dt}$ ни в одной точке не обращаются в нуль одновременно. В каждой точке кривой составляем касательный вектор ξ^i:

$$\xi^i(t) = \frac{dx^i(t)}{dt}. \tag{99.2}$$

Так как вдоль нашей кривой $\xi^i(t)$ образуют тензорное поле, то в любой ее точке можно вычислить абсолютный дифференциал

$$D\xi^i = d\xi^i + \Gamma^i_{kp}\xi^p\,dx^k \tag{99.3}$$

при бесконечно малом смещении из точки t в точку $t+dt$. Разделив (99.3) на dt почленно, получаем:

$$\frac{D\xi^i}{dt} = \frac{d\xi^i}{dt} + \Gamma^i_{kp}\xi^p\frac{dx^k}{dt}. \tag{99.4}$$

Один раз контравариантный тензор, в частности, $\frac{D\xi^i}{dt}$, всегда имеет истолкование в касательном евклидовом пространстве R_n в виде вектора. Вектор $\frac{D\xi^i(t)}{dt}$ мы будем называть *производной вектора* ξ^i по параметру t. От этого векторного поля можно в свою очередь вычислить производную $\frac{D\left(\frac{D\xi^i}{dt}\right)}{dt}$, которую мы будем обозначать $\frac{D^2\xi^i}{dt^2}$, и т. д. Выпишем последовательность векторов

$$\xi^i(t),\quad \frac{D\xi^i(t)}{dt},\quad \frac{D^2\xi^i(t)}{dt^2},\quad \ldots,\quad \frac{D^{n-1}\xi^i(t)}{dt^{n-1}} \tag{99.5}$$

в какой-нибудь точке $M(t)$ на кривой.

Вообще говоря, эти n векторов будут в каждой точке линейно независимыми. Рассмотрим *этот случай, который мы будем называть основным (кривая основного типа). Плоскость в касательном пространстве* R_n, *проходящая через точку* M *и построенная на первых* p *векторах* (99.5), *называется* p*-й соприкасающейся плоскостью* R_p. В частности, первая соприкасающаяся плоскость R_1 совпадает просто с касательной. Соприкасающиеся плоскости имеет смысл рассматривать, кончая R_{n-1}:

$$R_1 \subset R_2 \subset \ldots \subset R_p \subset R_{p+1} \subset \ldots \subset R_{n-1}. \tag{99.6}$$

Действительно, R_n совпадает уже со всем касательным пространством.

На данной кривой параметр t можно выбирать по-разному, в зависимости от чего будут меняться векторы последовательности (99.5). Однако плоскости R_p последовательности (99.6) от этого меняться не будут, так что *понятие соприкасающейся плоскости* R_p *носит инвариантный характер*. В самом деле, можно утверждать, что при переходе к новому параметру τ каждый вектор $\frac{D^p\xi^i(\tau)}{d\tau^p}$ разлагается по первым $p+1$ векторам последовательности (99.5). Начнем с $p=0$:

$$\xi^i(\tau) = \frac{dx^i}{d\tau}, \quad \xi^i(t) = \frac{dx^i}{dt},$$

откуда

$$\xi^i(\tau) = \xi^i(t)\frac{dt}{d\tau}. \tag{99.7}$$

Заметим, что при наших предположениях относительно кривой и выбора параметра на ней τ будет n раз непрерывно дифференцируемой функцией от t, равно как и обратно.

Берем почленно абсолютный дифференциал:

$$D\xi^i(\tau) = D\xi^i(t)\frac{dt}{d\tau} + \xi^i(t)\,D\frac{dt}{d\tau}.$$

Так как $\frac{dt}{d\tau}$ — величина скалярная, то $D\frac{dt}{d\tau} = d\frac{dt}{d\tau}$. Делим почленно на $d\tau$:

$$\frac{D\xi^i(\tau)}{d\tau} = \frac{D\xi^i(t)}{dt}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \xi^i(t)\,\frac{d^2t}{d\tau^2}. \tag{99.8}$$

Таким образом, $\xi^i(\tau)$ разлагается по $\xi^i(t)$ согласно (99.7); $\frac{D\xi^i(\tau)}{d\tau}$ разлагается по $\xi^i(t)$, $\frac{D\xi^i(t)}{dt}$ согласно (99.8); продолжая дифференцировать почленно, мы докажем наше утверждение для любого p:

$$\frac{D^p\xi^i(\tau)}{d\tau^p} = \alpha_{pp}\frac{D^p\xi^i(t)}{dt^p} + \alpha_{p,\,p-1}\frac{D^{p-1}\xi^i(t)}{dt^{p-1}} + \ldots + \alpha_{p,\,0}\xi^i(t), \tag{99.9}$$

где α_{pp}, $\alpha_{p,\,p-1}$, $\ldots$, $\alpha_{p,\,0}$ — некоторые скалярные коэффициенты, строением которых мы не интересуемся. Чтобы сделать рассуждение совершенно строгим и в то же время не затруднять себя фактическим дифференцированием до произвольного порядка p, достаточно доказывать формулу (99.9) от p к $p+1$. Тогда, беря от (99.9) абсолютный дифференциал D почленно и деля результат на $d\tau$, легко убеждаемся, что $\frac{D^{p+1}\xi^i(\tau)}{d\tau^{p+1}}$ разлагается по первым $p+2$ векторам (99.5). Это значит, что формула (99.9) верна для номера $p+1$, если она верна для номера p, а так как для $p=0$ (а также $p=1$) она уже проверена, то в результате она установлена при любом p. Разумеется, совершенно аналогичная формула имеет место и при обратном переходе от параметра τ к параметру t.

Итак, векторы

$$\xi^i(\tau),\quad \frac{D\xi^i(\tau)}{d\tau}, \ldots, \frac{D^p\xi^i(\tau)}{d\tau^p} \tag{99.10}$$

разлагаются по векторам

$$\xi^i(t),\quad \frac{D\xi^i(t)}{dt}, \ldots, \frac{D^p\xi^i(t)}{dt^p}, \tag{99.11}$$

равно как и обратно. Следовательно, плоскость R_{p+1} будет в обоих случаях одна и та же, что мы и хотели показать.

В частности, при $p=n-1$ отсюда следует, что векторы (99.5), подсчитанные для нового параметра τ, остаются линейно независимыми, так что наше определение *кривой основного типа* инвариантно относительно выбора параметра t.

Рассмотрим теперь различные случаи *уплощенной кривой* *); так мы будем называть кривую, в каждой точке которой векторы (99.5) линейно зависимы. Нарушение линейной независимости в отдельных точках мы рассматривать не будем. Пусть при этом первые m среди них

$$\xi^i(t), \quad \frac{D\xi^i(t)}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{D^{m-1}\xi^i(t)}{dt^{m-1}} \tag{99.12}$$

еще линейно независимы, а следующий за ними вектор $\frac{D^m\xi^i(t)}{dt^m}$ уже линейно зависит от предыдущих (в каждой точке кривой). Дифференцируя эту линейную зависимость, мы легко убеждаемся, что *не только* $\frac{D^m\xi^i(t)}{dt^m}$, *но и последующие производные линейно зависят от* (99.12), *т. е. лежат в соприкасающейся плоскости* R_m. Поэтому соприкасающиеся плоскости имеет смысл рассматривать лишь от R_1 до R_m: $R_1 \subset R_2 \subset \ldots \subset R_m$. Число m может принимать различные значения от 1 до $n-1$. Чем меньше m, тем сильнее «уплощение» кривой. При $m=1$ «уплощение» наибольшее, и кривая, как мы вскоре увидим, является геодезической. При $m=n$ «уплощение» исчезает, так как тогда векторы (99.5) линейно независимы, и мы возвращаемся к основному случаю.

Покажем, что максимально-мерная соприкасающаяся *плоскость* R_m *параллельно переносится вдоль кривой*, т. е. что ее векторы при параллельном перенесении вдоль кривой продолжают оставаться в этой плоскости (разумеется, в каждой точке кривой — своя плоскость R_m). Абсолютные дифференциалы векторов (99.12) имеют вид

$$\frac{D\xi^i}{dt}\,dt, \quad \frac{D^2\xi^i}{dt^2}\,dt, \quad \ldots, \quad \frac{D^m\xi^i}{dt^m}\,dt$$

и, следовательно, линейно зависят от самих этих векторов. Обозначая для краткости векторы (99.12) через $\xi_1^i, \xi_2^i, \ldots, \xi_m^i$, мы можем записать:

$$D\xi_p^i = (\alpha_p^1\xi_1^i + \alpha_p^2\xi_2^i + \ldots + \alpha_p^m\xi_m^i)\,dt \quad (p=1, 2, \ldots, m), \tag{99.13}$$

где α_p^q — коэффициенты соответствующих разложений; $\alpha_p^q = \alpha_p^q(t)$. Составим косое произведение:

$$\xi^{i_1 i_2 \ldots i_m} = \xi_1^{[i_1}\xi_2^{i_2}\ \ldots\ \xi_m^{i_m]} \tag{99.14}$$

*) Конец этого параграфа можно опустить без ущерба для понимания дальнейшего.

и вычислим его абсолютный дифференциал

$$D\xi^{i_1 i_2 \dots i_m} =$$
$$= D\xi_1^{[i_1} \xi_2^{i_2} \dots \xi_m^{i_m]} + \xi_1^{[i_1} D\xi_2^{i_2} \dots \xi_m^{i_m]} + \dots + \xi_1^{[i_1} \xi_2^{i_2} \dots D\xi_m^{i_m]}. \quad (99.15)$$

В первом слагаемом правой части заменяем $D\xi_1^{i_1}$ его разложением согласно (99.13) (при $p=1$). Учитывая, что при наличии одинаковых множителей косое произведение векторов обращается в нуль, мы можем сохранить в разложении $D\xi_1^i$ лишь член с ξ_1^i, т. е. $\alpha_1^1 \xi_1^i \, dt$. В результате первое слагаемое принимает вид $\alpha_1^1 \xi_1^{[i_1} \xi_2^{i_2} \dots \xi_m^{i_m]}$. Поступая аналогичным образом с остальными слагаемыми в правой части (99.15), мы приводим это равенство к виду

$$D\xi^{i_1 i_2 \dots i_m} = (\alpha_1^1 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_m^m) \, dt \, \xi^{i_1 i_2 \dots i_m} = \alpha \, dt \, \xi^{i_1 i_2 \dots i_m}, \quad (99.16)$$

где мы обозначили для краткости

$$\alpha = \alpha_1^1 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_m^m. \quad (99.17)$$

Соотношение (99.16) *означает, что m-мерная плоскость R_m, построенная на векторах $\xi_1^i, \dots, \xi_m^i$, параллельно переносится вдоль нашей кривой.*

В самом деле, m-вектор $\xi^{i_1 i_2 \dots i_m}$ всегда можно пронормировать так, что его абсолютный дифференциал будет равен нулю. Для этого умножим (99.16) почленно на скалярную функцию

$$\varphi(t) = e^{-\int \alpha(t)\, dt} \neq 0.$$

Так как $D\varphi(t) = d\varphi(t) = -e^{-\int \alpha(t)\, dt} \alpha(t)\, dt$, то получаем:

$$\varphi(t) D\xi^{i_1 \dots i_m} = -D\varphi(t) \xi^{i_1 \dots i_m},$$

откуда

$$D(\varphi(t) \xi^{i_1 \dots i_m}(t)) = 0, \quad (99.18)$$

так что *m-вектор $\varphi(t) \xi^{i_1 \dots i_m}(t)$ параллельно переносится вдоль нашей кривой.*

Пусть теперь η^i — вектор, также параллельно переносимый вдоль нашей кривой. Тогда альтернированное произведение

$$\eta^{i_1 \dots i_m i} = \varphi \cdot \xi^{[i_1 \dots i_m} \eta^{i]} \quad (99.19)$$

будет также параллельно переносимым $m+1$-вектором. Отсюда следует, что если $\eta^{i_1 \dots i_m i}$ равно нулю в одной точке кривой, то это же имеет место и в любой ее точке. Но обращение $\eta^{i_1 \dots i_m i}$ в нуль означает согласно (35.13) линейную зависимость вектора η^i от векторов $\xi^i_1, \ldots, \xi^i_m$, т. е. принадлежность η^i нашей плоскости R_m. Таким образом, *если параллельно переносимый вдоль кривой вектор η^i принадлежит R_m в одной точке кривой, то это же имеет место и в любой ее точке*. Это свойство мы и имеем в виду, когда говорим, что плоскость R_m параллельно переносится вдоль кривой. Наше утверждение доказано.

В частности, когда $m=1$, параллельно переносится касательная R_1, т. е. всякий вектор η^i, касательный в данной точке кривой, остается касательным и в процессе параллельного перенесения вдоль кривой. Но это есть определение *геодезической линии*, которая, таким образом, является наиболее «уплощенной» из всех кривых в V_n.

В случае, когда в качестве V_n берется евклидово пространство R_n, уплощенная кривая просто лежит в своей соприкасающейся плоскости R_m, общей для всех точек кривой.

§ 100. Кривые в римановом пространстве (окончание)

В этом параграфе мы ограничимся кривой *основного типа*, причем будем предполагать, кроме того, что в каждой ее точке *M все соприкасающиеся плоскости*

$$R_1 \subset R_2 \subset \ldots \subset R_p \subset R_{p+1} \subset \ldots \subset R_{n-1} \qquad (100.1)$$

являются неизотропными плоскостями в касательном евклидовом пространстве R_n. В случае собственно риманова пространства это условие соблюдается автоматически.

При этих предположениях с каждой точкой кривой можно естественным образом связать *ортонормированный репер*. А именно, выбираем единичные или мнимоединичные векторы

$$\nu^i_0,\ \nu^i_1,\ \ldots,\ \nu^i_{p-1},\ \nu^i_p,\ \ldots,\ \nu^i_{n-1} \qquad (100.2)$$

следующим образом:

ν^i_0 направлен по касательной R_1 и совпадает, следовательно, с пронормированным касательным вектором $\frac{dx^i}{dt}$;

ν^i_1 построен в двумерной плоскости R_2 ортогонально к R_1:

. . . .

ν^i_p построен в R_{p+1} ортогонально к R_p;

. . . .

ν^i_{n-1} ортогонален к R_{n-1}.

В каждом случае идет речь о построении в евклидовом пространстве R_{p+1} направления, ортогонального к его гиперплоскости R_p, что выполняется единственным образом. Вследствие неизотропно-