торов $\xi_1^i, \ldots, \xi_m^i$, т. е. принадлежность η^i нашей плоскости R_m. Таким образом, *если параллельно переносимый вдоль кривой вектор η^i принадлежит R_m в одной точке кривой, то это же имеет место и в любой ее точке*. Это свойство мы и имеем в виду, когда говорим, что плоскость R_m параллельно переносится вдоль кривой. Наше утверждение доказано.

В частности, когда $m=1$, параллельно переносится касательная R_1, т. е. всякий вектор η^i, касательный в данной точке кривой, остается касательным и в процессе параллельного перенесения вдоль кривой. Но это есть определение *геодезической линии*, которая, таким образом, является наиболее «уплощенной» из всех кривых в V_n.

В случае, когда в качестве V_n берется евклидово пространство R_n, уплощенная кривая просто лежит в своей соприкасающейся плоскости R_m, общей для всех точек кривой.

§ 100. Кривые в римановом пространстве (окончание)

В этом параграфе мы ограничимся кривой *основного типа*, причем будем предполагать, кроме того, что в каждой ее точке M *все соприкасающиеся плоскости*

$$R_1 \subset R_2 \subset \ldots \subset R_p \subset R_{p+1} \subset \ldots \subset R_{n-1} \tag{100.1}$$

являются неизотропными плоскостями в касательном евклидовом пространстве R_n. В случае собственно риманова пространства это условие соблюдается автоматически.

При этих предположениях с каждой точкой кривой можно естественным образом связать *ортонормированный репер*. А именно, выбираем единичные или мнимоединичные векторы

$$v_0^i,\ v_1^i,\ \ldots,\ v_{p-1}^i,\ v_p^i,\ \ldots,\ v_{n-1}^i \tag{100.2}$$

следующим образом:

v_0^i направлен по касательной R_1 и совпадает, следовательно, с пронормированным касательным вектором $\frac{dx^i}{dt}$;

v_1^i построен в двумерной плоскости R_2 ортогонально к R_1:

. . . .

v_p^i построен в R_{p+1} ортогонально к R_p;

. . . .

v_{n-1}^i ортогонален к R_{n-1}.

В каждом случае идет речь о построении в евклидовом пространстве R_{p+1} направления, ортогонального к его гиперплоскости R_p, что выполняется единственным образом. Вследствие неизотропности R_p это направление будет также неизотропным и гиперплоскости R_p не принадлежит (§ 41). Вектор v^i_p, идущий в этом направлении, может быть, следовательно, пронормирован, т. е. умножением на подходящее число сведен *к единичному или мнимоединичному вектору*. После этого он будет вполне определен с точностью до умножения на -1.

Поскольку v^i_p ортогонален к R_p, то он ортогонален ко всем предшествующим векторам $v^i_0, \ldots, v^i_{p-1}$, а значит, векторы (100.2) вообще попарно ортогональны, а так как, кроме того, они пронормированы (единичные или мнимоединичные), то мы получаем вполне определенный (с точностью возможных замен v^i_p на $-v^i_p$) *ортонормированный репер, связанный с каждой точкой нашей кривой. Его мы будем называть сопровождающим репером нашей кривой.* Очевидно, векторы $v^i_0, v^i_1, \ldots, v^i_p$ при любом $p=0, 1, 2, \ldots, n-1$ определяют соприкасающуюся плоскость R_{p+1}. Прямые, проходящие в касательном пространстве R_n через данную точку кривой в направлениях ортов $v^i_1, v^i_2, \ldots, v^i_{n-1}$, мы будем называть 1-й, 2-й, $\ldots$, $n-1$-й *нормалями* к нашей кривой.

Орт v^i_0 направлен по касательной.

Так как касательная R_1 неизотропная, то скалярный квадрат касательного вектора $\frac{dx^i}{dt}$ не равен нулю:

$$g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} \neq 0. \tag{100.3}$$

Вычислим длину дуги нашей кривой от некоторой начальной точки t_0 до переменной точки t по формуле (85.10):

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}\,dt, \qquad ds = \sqrt{g_{ij}\,dx^i\,dx^j}\,.$$

Пусть сначала подкоренное выражение остается все время положительным. Тогда кривая имеет вещественную длину, и при $t > t_0$ мы получаем положительные значения s, при $t < t_0$ — отрицательные. Так как производная $\frac{ds}{dt}$ все время положительная, то зависимость $s = s(t)$ допускает обращение, и *s можно принять за новый параметр вдоль кривой*. Так мы и поступим.

Положительное направление отсчета дуги s такое же, как и первоначального параметра t, т. е. выбирается по существу произвольно. Касательный вектор $\frac{dx^i}{ds}$ будет единичным, так как его скалярный квадрат имеет вид

$$g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = 1. \tag{100.4}$$

Следовательно, можно принять $\frac{dx^i}{ds}$ за вектор ν_0^i:

$$\nu_0^i = \frac{dx^i}{ds}. \tag{100.5}$$

Обратно, если для некоторого параметра s вдоль кривой вектор $\frac{dx^i}{ds}$ оказывается единичным, то имеет место (100.4) и, следовательно, $ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j$, так что параметр s оказывается длиной дуги.

Пусть теперь *подкоренное выражение остается все время отрицательным, так что радикал чисто мнимый,* и мы имеем кривую чисто мнимой длины. Мы запишем:

$$s = \sigma i$$

и за *новый параметр вдоль кривой будем принимать вещественный коэффициент* σ. За вектор ν_0^i мы примем вектор $\frac{dx^i}{d\sigma}$, причем он будет уже мнимоединичным. В самом деле, его скалярный квадрат имеет вид

$$g_{ij}\frac{dx^i}{d\sigma}\frac{dx^j}{d\sigma} = -g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = -1, \text{ так как } ds^2 = -d\sigma^2.$$

Итак,

$$\nu_0^i = \frac{dx^i}{d\sigma}. \tag{100.6}$$

Обратно, если для некоторого параметра σ вдоль кривой вектор $\frac{dx^i}{d\sigma}$ оказывается мнимоединичным, то $g_{ij}\frac{dx^i}{d\sigma}\frac{dx^j}{d\sigma} = -1$, откуда $d\sigma^2 = -ds^2$, так что длина дуги кривой оказывается чисто мнимой и имеет вид $s = \sigma i$.

Мы хотим теперь установить для ортов ν_p^i сопровождающего репера *формулы Френе.* Другими словами, мы хотим выяснить, как разлагаются производные этих ортов $\frac{D\nu_p^i}{ds}$ $\left(\text{или } \frac{D\nu_p^i}{d\sigma}\right)$ по самим этим ортам. Для определенности будем говорить о параметре s, имея в виду, что все сказанное будет справедливо и в случае параметра σ.

Заметим прежде всего, что $\frac{D\nu_p^i}{ds}$ *всегда принадлежит плоскости* R_{p+2}, т. е. *вполне разлагается по ортам* $\nu_0^i, \nu_1^i, \ldots, \nu_{p+1}^i$. В самом деле, ν_p^i принадлежит плоскости R_{p+1}, т. е. разлагается по векторам (99.11):

$$\xi^i(t), \ \frac{D\xi^i(t)}{dt}, \ \ldots, \ \frac{D^p\xi^i(t)}{dt^p}.$$

Ясно, что при дифференцировании этого разложения порядок входящих в него производных повышается не более чем на единицу, так что Dv_p^i будет разлагаться по векторам

$$\xi^i(t), \quad \frac{D\xi^i(t)}{dt}, \ldots, \frac{D^{p+1}\xi^i(t)}{dt^{p+1}},$$

определяющим плоскость R_{p+2}. Итак, $\frac{Dv_p^i}{ds}$ принадлежит плоскости R_{p+2} и разлагается по $v_0^i, v_1^i, \ldots, v_{p+1}^i$, а следовательно, *ортогонален к* $v_{p+2}^i, \ldots, v_{n-1}^i$:

$$g_{ij}v_q^i \frac{Dv_p^j}{ds} = 0 \text{ при } q > p+1. \tag{100.7}$$

Используем теперь ортогональность векторов v_p^i, v_q^i:

$$g_{ij}v_q^i v_p^j = 0.$$

Беря почленно абсолютный дифференциал и учитывая, что $Dg_{ij} = 0$, получаем:

$$g_{ij}(Dv_q^i)v_p^j + g_{ij}v_q^i Dv_p^j = 0.$$

Деля почленно на ds и пользуясь (100.7), получаем окончательно:

$$g_{ij}\frac{Dv_q^i}{ds}v_p^j = 0 \text{ при } q > p+1.$$

Нам будет удобнее поменять в этой формуле обозначения p и q:

$$g_{ij}\frac{Dv_p^i}{ds}v_q^j = 0 \text{ при } p > q+1 \tag{100.8}$$

(т. е. при $q < p-1$). Сопоставляя формулы (100.7) и (100.8), можно сказать, что *вектор* $\frac{Dv_p^i}{ds}$ *ортогонален ко всем ортам* v_q^i *кроме, может быть, ортов*

$$v_{p-1}^i, \; v_p^i, \; v_{p+1}^i.$$

Однако оказывается, что вектор $\frac{Dv_p^i}{ds}$ ортогонален и к орту v_p^i. В самом деле, скалярный квадрат вектора v_p^i равен ± 1:

$$g_{ij}v_p^i v_p^j = \pm 1.$$

Дифференцируя это соотношение, получим:

$$g_{ij}(Dv_p^i)\, v_p^j + g_{ij} v_p^i D v_p^j = 0,$$

т. е.

$$2g_{ij}\cdot v_p^i D v_p^j = 0, \tag{100.9}$$

а это означает ортогональность Dv_p^i к v_p^i.

В итоге разложение вектора $\frac{Dv_p^i}{ds}$ по ортам v_0^i, v_1^i, ..., v_{n-1}^i может содержать лишь v_{p-1}^i и v_{p+1}^i. Запишем:

$$\frac{Dv_p^i}{ds} = \varkappa_{p,\,p-1}\, v_{p-1}^i + \varkappa_{p,\,p+1} v_{p+1}^i, \tag{100.10}$$

где через $\varkappa_{p,\,p-1}$, $\varkappa_{p,\,p+1}$ обозначены соответствующие коэффициенты. Разумеется, в случае $p=0$ в правой части имеется лишь второй член (v_{-1}^i не существует), а в случае $p=n-1$ — лишь первый член (v_n^i не существует).

Покажем, наконец, что существенно различных коэффициентов $\varkappa_{p,\,q}$ в действительности вдвое меньше, чем кажется с первого взгляда. Умножая (100.10) скалярно на орт v_{p-1}^i, мы получаем:

$$g_{ij}\frac{Dv_p^i}{ds}\, v_{p-1}^j = \varkappa_{p,\,p-1}\, \varepsilon_{p-1}, \tag{100.11}$$

где ε_{p-1} равно скалярному квадрату орта v_{p-1}^i, т. е. 1, если этот орт единичный, и —1, если он мнимоединичный. Аналогичным образом, умножая (100.10) на v_{p+1}^i скалярно, получаем:

$$g_{ij}\frac{Dv_p^i}{ds}\, v_{p+1}^j = \varkappa_{p,\,p+1}\, \varepsilon_{p+1}. \tag{100.12}$$

С другой стороны, записав ортогональность ортов v_p^i, v_{p+1}^i

$$g_{ij} v_p^i v_{p+1}^j = 0 \quad (p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-2)$$

и дифференцируя это соотношение, получаем:

$$g_{ij}\frac{Dv_p^i}{ds}\, v_{p+1}^j + g_{ij} v_p^i \frac{Dv_{p+1}^j}{ds} = 0.$$

Заменяя в (100.11) p на $p+1$ и используя, кроме того, (100.12), мы видим, что наше равенство можно переписать в виде

$$\varkappa_{p,\,p+1}\, \varepsilon_{p+1} + \varkappa_{p+1,\,p}\, \varepsilon_p = 0. \tag{100.13}$$

Это значит, что $\varkappa_{p,\,p+1}$ *и* $\varkappa_{p+1,\,p}$ *равны, если орты* ν_p^i, ν_{p+1}^i *разноименные* (*один единичный, другой мнимоединичный*), *и отличаются лишь знаком, если эти орты одноименные* (*оба единичные или оба мнимоединичные*). Обозначим:

$$\varkappa_{p,\,p+1}=\varkappa_{p+1}, \text{ тогда } \varkappa_{p+1,\,p}=\pm\varkappa_{p+1}, \tag{100.14}$$

где знак плюс отвечает случаю разноименных, а минус — случаю одноименных ортов ν_p^i, ν_{p+1}^i.

Формулы (100.10) принимают теперь окончательный вид

$$\frac{D\nu_p^i}{ds}=\pm\varkappa_p\nu_{p-1}^i+\varkappa_{p+1}\nu_{p+1}^i, \tag{100.15}$$

где знак плюс отвечает случаю разноименных, а минус — случаю одноименных ортов ν_{p-1}^i, ν_p^i.

В собственно римановом пространстве, где все орты одноименные (*единичные*), *в первом члене правой части всегда стоит знак минус.*

Выпишем формулы (100.15) подробнее — при $p=0, 1, \ldots, n-1$:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{D\nu_0^i}{ds}&= && \varkappa_1\nu_1^i,\\
\frac{D\nu_1^i}{ds}&=\pm\varkappa_1\nu_0^i && +\varkappa_2\nu_2^i,\\
\frac{D\nu_2^i}{ds}&=\pm\varkappa_2\nu_1^i && +\varkappa_3\nu_3^i,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{D\nu_{n-2}^i}{ds}&=\pm\varkappa_{n-2}\nu_{n-3}^i && +\varkappa_{n-1}\nu_{n-1}^i,\\
\frac{D\nu_{n-1}^i}{ds}&=\pm\varkappa_{n-1}\nu_{n-2}^i.
\end{aligned}\right\} \tag{100.16}$$

Это и есть формулы Френе для кривой в римановом пространстве. Коэффициенты $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, ..., $\varkappa_{n-1}$ *называются первой, второй, ..., $n-1$-й кривизной кривой в данной точке.* При наших предположениях они отличны от нуля. Действительно, если бы, например, $\varkappa_3$ равнялось нулю, то ν_0^i, $\frac{D\nu_0^i}{ds}$, $\frac{D^2\nu_0^i}{ds^2}$, $\frac{D^3\nu_0^i}{ds^3}$ разлагались бы по ν_0^i, ν_1^i, ν_2^i и были бы, следовательно, линейно зависимы, а это противоречит предположению, что кривая основного типа. *Кривизны* $\varkappa_1$, ..., $\varkappa_{n-1}$ *всегда можно сделать положительными за счет окончательного выбора сопровождающего репера.* В самом деле, будем считать, что *кривая задана вместе с положительным направлением отсчета дуги s* (*или* σ). Будем определять тогда орт ν_0^i согласно (100.5) или (100.6); остальные же орты остаются определенными с точностью до умножения на -1. Теперь, если в первой формуле Френе $\varkappa_1 > 0$, то оставляем орт ν_1^i без изменения; если же $\varkappa_1 < 0$, то меняем направление ν_1^i на обратное; тогда кривизна $\varkappa_1$ становится положительной. Далее, если во второй формуле Френе $\varkappa_2 > 0$, то оставляем орт ν_2^i без изменения; если же $\varkappa_2 < 0$, то меняем направление ν_2^i на обратное, и кривизна $\varkappa_2$ становится положительной, и т. д. *В результате мы окончательно выбираем сопровождающий репер и в то же время добиваемся того, что все кривизны $\varkappa_p$ станут положительными.*

Заметим, что если изменить направление отсчета дуги на обратное, то, как легко убедиться из (100.5) и формул Френе, орты ν_1^i, ν_3^i, ν_5^i, ... остаются прежними, а ν_0^i, ν_2^i, ν_4^i, ... меняют направление на обратное. При этом подразумевается, что по установленному соглашению кривизны $\varkappa_p$ остаются положительными (и тем самым не меняются). В качестве важного частного случая нашей теории рассмотрим *кривые в евклидовом пространстве* R_n. Пространство R_n является само к себе касательным в любой своей точке (§ 86), и векторы сопровождающего репера ν_p^i принадлежат самому R_n. Мы будем обозначать их $\mathbf{v}_p$. Абсолютные дифференциалы в формулах Френе означают дифференцирование векторов $\mathbf{v}_p$ в геометрическом смысле (§ 96), так что формулы Френе примут вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}_0}{ds} &= \qquad\qquad \varkappa_1\mathbf{v}_1, \\ \frac{d\mathbf{v}_1}{ds} &= \pm\varkappa_1\mathbf{v}_0 \qquad +\varkappa_2\mathbf{v}_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{d\mathbf{v}_{n-2}}{ds} &= \pm\varkappa_{n-2}\mathbf{v}_{n-3}+\varkappa_{n-1}\mathbf{v}_{n-1}, \\ \frac{d\mathbf{v}_{n-1}}{ds} &= \pm\varkappa_{n-1}\mathbf{v}_{n-2}. \end{aligned}\right\} \tag{100.17}$$

В частности, в трехмерном евклидовом пространстве

$$\frac{d\mathbf{v}_0}{ds}=\varkappa_1\mathbf{v}_1, \quad \frac{d\mathbf{v}_1}{ds}=\pm\varkappa_1\mathbf{v}_0+\varkappa_2\mathbf{v}_2, \quad \frac{d\mathbf{v}_2}{ds}=\pm\varkappa_2\mathbf{v}_1. \tag{100.18}$$

В обычном пространстве, т. е. в собственно евклидовом R_3, в последних двух формулах, как мы знаем, нужно выбрать из знаков $\pm$ знак $-$. Мы получаем формулы Френе в их обычной записи, где $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ — орты, направленные соответственно по касательной, главной нормали и бинормали к кривой, а $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ — соответственно *кривизна* и *кручение*. Обращает на себя внимание то обстоятельство, что в нашей теории $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ всегда положительны, в то время как обычно принято приписывать кручению $\varkappa_2$ знак $\pm$ в зависимости от «правой» или «левой» закрученности кривой. Это связано с тем, что в нашей теории сопровождающий репер будет правым для «право-закрученной» кривой и левым для «лево-закрученной»; обычно же сопровождающий репер выбирается во всех случаях правым; это и вызывает появление отрицательного кручения $\varkappa_2$ в случае «лево-закрученной» кривой.

Имеет место следующая теорема: пусть произвольным образом заданы непрерывные, положительные функции некоторого аргумента s

$$\varkappa_1(s), \quad \varkappa_2(s), \quad \ldots, \quad \varkappa_{n-1}(s), \quad s_0 \leqslant s \leqslant s_1. \tag{100.19}$$

Кроме того, в каком-нибудь R_n *задан ортонормированный репер* $\{M_0, \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}\}$, *где* $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}$ — *единичные и мнимоединичные векторы, чередующиеся произвольным образом. Тогда в этом* R_n *всегда существует кривая, и притом единственная, вдоль которой кривизны* $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{n-1}$ *выражаются наперед заданными функциями через длину дуги* s *(в случае* $\mathbf{e}_0^2 = 1$) *или через параметр* $\sigma = \frac{s}{i}$ *(в случае* $\mathbf{e}_0^2 = -1$) *и сопровождающий репер которой при* $s = s_0$ *совпадает с наперед заданным репером.*

Докажем теорему сначала в случае $\mathbf{e}_0^2 = 1$. Будем рассматривать (100.17) как систему линейных дифференциальных уравнений с аргументом s с неизвестными функциями $\mathbf{v}_0(s), \ldots, \mathbf{v}_{n-1}(s)$.

Коэффициентами $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n-1}$ служат при этом наперед заданные функции (100.19). Знак $\pm$ в каждом из уравнений

$$\frac{d\mathbf{v}_p}{ds} = \pm \varkappa_p \mathbf{v}_{p-1} + \varkappa_{p+1} \mathbf{v}_{p+1}$$

выбирается следующим образом: плюс, если орты $\mathbf{e}_p$, $\mathbf{e}_{p-1}$ разноименные, и минус, если они одноименные. Кроме того, на неизвестные функции $\mathbf{v}_0(s), \ldots, \mathbf{v}_{p-1}(s)$ мы накладываем начальные условия

$$\mathbf{v}_0(s_0) = \mathbf{e}_0, \quad \mathbf{v}_1(s_0) = \mathbf{e}_1, \quad \ldots, \quad \mathbf{v}_{n-1}(s_0) = \mathbf{e}_{n-1}. \tag{100.20}$$

Тогда, как известно из теории дифференциальных уравнений, система допускает решение, существующее на всем интервале изменения s (от s_0 до s_1) и при этом единственное. Нас не должно смущать, что неизвестные функции $\mathbf{v}_p(s)$ являются векторами: каждую из них можно заменить n скалярными функциями, именно, координатами вектора $\mathbf{v}_p(s)$, и соответственно каждое векторное уравнение системы (100.17) заменить n скалярными уравнениями. Теорему существования и единственности решения мы применяем тогда к системе n^2 линейных дифференциальных уравнений с n^2 неизвестными функциями, теперь уже скалярными.

Построив таким образом вектор-функции $\mathbf{v}_p(s)$, *мы должны показать, что они образуют ортонормированный репер при любом значении* s (а не только при $s = s_0$, когда они совпадают с ортами $\mathbf{e}_p$).

Покажем это прежде всего для случая собственно евклидова пространства R_n. Тогда в уравнениях (100.17) вместо $\pm$ везде стоит —. Пусть $\mathbf{a}$ — произвольный *постоянный* вектор в R_n. Обозначим через $a_i(s)$ скалярные произведения.

$$a_i(s) = \mathbf{a}\mathbf{v}_i(s). \tag{100.21}$$

Умножая почленно уравнения (100.17) на $\mathbf{a}$ скалярно, получим:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{da_0}{ds} &= \varkappa_1 a_1,\\
\frac{da_1}{ds} &= -\varkappa_1 a_0 + \varkappa_2 a_2,\\
\frac{da_2}{ds} &= -\varkappa_2 a_1 + \varkappa_3 a_3,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
\frac{da_{n-1}}{ds} &= -\varkappa_{n-1} a_{n-2}.
\end{aligned}\right\} \tag{100.22}$$

Очевидно, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ можно рассматривать как *ковариантные* координаты вектора $\mathbf{a}$ относительно *переменного* репера $\{\mathbf{v}_0(s), \mathbf{v}_1(s), \dots, \mathbf{v}_{n-1}(s)\}$. Будет ли этот репер ортонормированным, пока не предрешается. Заметим, что векторы $\mathbf{v}_p(s)$ во всяком случае линейно независимы: косое произведение $[\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1\dots\mathbf{v}_{n-1}]$ остается постоянным (что легко получить из уравнений (100.17), вычисляя $\frac{d}{ds}[\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1\dots\mathbf{v}_{n-1}] = 0$), а, обращаясь к начальным условиям (100.20), получаем $[\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1\dots\mathbf{v}_{n-1}] = [e_0e_1\dots e_{n-1}] \neq 0$.

Составим сумму квадратов координат $a_p(s)$ и покажем, что она остается постоянной в процессе изменения $\mathbf{v}_p(s)$. Для этой цели вычислим ее производную:

$$\frac{d}{ds}(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2) =$$
$$= 2\left(a_0\frac{da_0}{ds} + a_1\frac{da_1}{ds} + a_2\frac{da_2}{ds} + \dots + a_{n-1}\frac{da_{n-1}}{ds}\right) = 0.$$

Равенство нулю немедленно вытекает из (100.22). Итак, сумма квадратов координат a_p остается постоянной, а так как при $s = s_0$ наш переменный репер совпадает с ортонормированным репером (100.20), то эта сумма квадратов выражает скалярный квадрат вектора $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{a}^2 = a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2.$$

В результате скалярный квадрат *произвольного* вектора $\mathbf{a}$ выражается в нашем переменном репере суммой квадратов ковариантных координат вектора $\mathbf{a}$, а это означает, что переменный репер является ортонормированным, что мы и хотели доказать.

В случае псевдоевклидова пространства R_n доказательство проводится совершенно аналогичным образом. Конечно, вместо суммы квадратов координат a_p нужно брать

$$\varepsilon_0 a_0^2 + \varepsilon_1 a_1^2 + \ldots + \varepsilon_{n-1} a_{n-1}^2,$$

где ε_p равно ± 1 в зависимости от того, является ли $\mathbf{e}_p$ единичным или мнимоединичным вектором. Вместо уравнений (100.22) мы будем иметь уравнения вида

$$\frac{da_p}{ds} = -\varepsilon_p \varepsilon_{p-1} \varkappa_p a_{p-1} + \varkappa_{p+1} a_{p+1}.$$

В остальном ход рассуждения не меняется.

Установив, что вектор-функции $\mathbf{v}_p(s)$ образуют ортонормированный репер, мы строим искомую кривую, выражая ее скользящий радиус-вектор как функцию от s:

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0 + \int_{s_0}^{s} \mathbf{v}_0(s)\, ds, \tag{100.23}$$

где $\mathbf{x}_0$ обозначает радиус-вектор точки M_0. Тогда при $s = s_0$ мы попадаем в точку M_0. Кроме того, из (100.23) следует:

$$\mathbf{x}'(s) = \mathbf{v}_0(s). \tag{100.24}$$

Но вектор $\mathbf{v}_0(s)$ *единичный*, так как при $s = s_0$ он совпадает с единичным вектором $\mathbf{e}_0$. Таким образом, производная радиуса-вектора по параметру s будет единичным вектором, *откуда следует, что s играет роль дуги вдоль построенной кривой* (заранее мы этого не знаем). Установив, что $\mathbf{v}_0(s)$ — единичный касательный вектор, и пользуясь соотношениями (100.17), которым удовлетворяют функции $\mathbf{v}_p(s)$, мы без труда убеждаемся, что векторы $\mathbf{v}_p(s)$ образуют для построенной кривой сопровождающий репер, а наперед заданные функции $\varkappa_p(s)$ играют роль кривизн. Этим теорема доказана. Правда, в теореме еще утверждается единственность искомой кривой, но это легко получить из следующих соображений. Для ортов $\mathbf{v}_p(s)$ сопровождающего репера искомой кривой *необходимо* имеют место уравнения (100.17), т. е. формулы Френе, так что, учитывая еще начальные условия, функции $\mathbf{v}_p(s)$ можно получить только тем способом, как это было сделано. При этом для касательного орта $\mathbf{v}_0(s)$ *необходимо* имеет место соотношение (100.24), интегрируя которое мы приходим к (100.23). Таким образом, полученная нами кривая единственно возможная.

Мы провели доказательство в случае $\mathbf{e}_0^2 = 1$. В случае $\mathbf{e}_0^2 = -1$ оно производится дословно так же, только обозначение параметра s нужно везде заменить на σ. Формула (100.24) получится у нас в виде

$$\mathbf{x}'(\sigma) = \mathbf{v}_0(\sigma), \tag{100.25}$$

причем $\mathbf{v}_0(\sigma)$ будет (вместе со своим начальным значением $\mathbf{e}_0$) *мнимоединичным ортом*. Это говорит о том, что кривая имеет чисто мнимую длину дуги s, причем $s = \sigma i$.

Из доказанной теоремы вытекает следующее. *Когда для искомой кривой в R_n наперед заданы «натуральные уравнения», т. е. зависимость кривизн $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n-1}$ от дуги s при $s_0 \leqslant s \leqslant s_1$ (или, аналогично от параметра σ), и, кроме того, указано, какие из векторов сопровождающего репера $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ должны быть единичными и какие — мнимоединичными*[1]*), то кривая определяется с точностью до движений в R_n.* Действительно, в этом случае произвол сводится лишь к выбору начального ортонормированного репера $\{M_0, \mathbf{e}_0, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}\}$, причем заранее известно, какие из его векторов должны быть единичными и какие — мнимоединичными, тогда начальный репер, а вместе с ним и кривая определяются с точностью до движения в R_n.

§ 101. Геодезические линии в римановом пространстве

Мы рассматривали в § 90 геодезические линии в пространстве аффинной связности L_n, в частности, в пространстве L_n^0 (без кручения). Все, сказанное там, справедливо и для геодезических в римановом пространстве V_n, так как риманова связность есть частный случай аффинной связности без кручения. Но в связи с наличием метрики у геодезических линий появляются новые свойства, которые мы и хотим сейчас рассмотреть.

Отметим прежде всего, что для неизотропной геодезической длина дуги s (или σ) служит *каноническим* параметром (§ 90), так что все остальные канонические параметры τ будут отличаться от s лишь постоянным множителем. В самом деле, касательный единичный вектор $\frac{dx^i}{ds}$, взятый в какой-нибудь точке геодезической и затем параллельно переносимый вдоль нее, остается касательным (по определению геодезической) и сохраняет длину 1 (по свойствам римановой связности), т. е. остается вектором $\frac{dx^i}{ds}$, а это значит, что дуга s служит каноническим параметром. Поэтому для геодезических, отнесенных к параметру s, имеют место дифференциальные уравнения (90.6):

$$\frac{d^2x^k}{ds^2} = -\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}. \tag{101.1}$$

---

[1]) Число последних, конечно, должно совпадать с индексом k пространства $R_n \,(= R_n^{(k)})$.