в виде

$$\mathbf{x}'(\sigma)=\mathbf{v}_0(\sigma), \tag{100.25}$$

причем $\mathbf{v}_0(\sigma)$ будет (вместе со своим начальным значением $\mathbf{e}_0$) *мнимоединичным ортом*. Это говорит о том, что кривая имеет чисто мнимую длину дуги s, причем $s=\sigma i$.

Из доказанной теоремы вытекает следующее. *Когда для искомой кривой в R_n наперед заданы «натуральные уравнения», т. е. зависимость кривизн $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n-1}$ от дуги s при $s_0 \leqslant s \leqslant s_1$ (или, аналогично от параметра σ), и, кроме того, указано, какие из векторов сопровождающего репера $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ должны быть единичными и какие — мнимоединичными*[1]*, то кривая определяется с точностью до движений в R_n.* Действительно, в этом случае произвол сводится лишь к выбору начального ортонормированного репера $\{M_0, \mathbf{e}_0, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}\}$, причем заранее известно, какие из его векторов должны быть единичными и какие — мнимоединичными, тогда начальный репер, а вместе с ним и кривая определяются с точностью до движения в R_n.

§ 101. Геодезические линии в римановом пространстве

Мы рассматривали в § 90 геодезические линии в пространстве аффинной связности L_n, в частности, в пространстве L_n^0 (без кручения). Все, сказанное там, справедливо и для геодезических в римановом пространстве V_n, так как риманова связность есть частный случай аффинной связности без кручения. Но в связи с наличием метрики у геодезических линий появляются новые свойства, которые мы и хотим сейчас рассмотреть.

Отметим прежде всего, что для неизотропной геодезической длина дуги s (или σ) служит *каноническим* параметром (§ 90), так что все остальные канонические параметры τ будут отличаться от s лишь постоянным множителем. В самом деле, касательный единичный вектор $\frac{dx^i}{ds}$, взятый в какой-нибудь точке геодезической и затем параллельно переносимый вдоль нее, остается касательным (по определению геодезической) и сохраняет длину 1 (по свойствам римановой связности), т. е. остается вектором $\frac{dx^i}{ds}$, а это значит, что дуга s служит каноническим параметром. Поэтому для геодезических, отнесенных к параметру s, имеют место дифференциальные уравнения (90.6):

$$\frac{d^2x^k}{ds^2}=-\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}. \tag{101.1}$$

[1]) Число последних, конечно, должно совпадать с индексом k пространства $R_n\,(=R_n^{(k)})$.

Совершенно аналогично обстоит дело в случае геодезической мнимой длины $s=\sigma i$, когда за параметр мы принимаем σ. Тогда $\frac{dx^i}{d\sigma}$ аналогично $\frac{dx^i}{ds}$ будет параллельно переносимым вдоль геодезической касательным вектором (только не единичным, а мнимоединичным), параметр σ будет каноническим, и снова имеют место дифференциальные уравнения (101.1) с заменой параметра s на σ.

В собственно римановых V_n все геодезические — неизотропные (и вещественной длины) и их всегда можно относить к дуге s как к параметру. Но в случае псевдоримановых V_n обязательно существуют и изотропные геодезические.

Имеет место следующая теорема:

Геодезическая линия, проведенная через данную точку M_0 в изотропном направлении, будет изотропной на всем своем протяжении. В самом деле, касательный вектор ξ^i к геодезической в точке M_0 будет изотропным, т. е. имеет нулевую длину, будучи сам отличен от нуля. При параллельном перенесении вдоль геодезической этот вектор остается к ней касательным и в то же время сохраняет нулевую длину по общим свойствам римановой связности. Таким образом, наша геодезическая и в любой своей точке будет идти в изотропном направлении.

На изотропных и геодезических нельзя принять за параметр длину дуги s (или σ) ввиду ее тождественного обращения в нуль. Но, разумеется, можно рассматривать канонический параметр τ (§ 90).

Рассмотрим теперь задачу: *вычислить вариацию длины дуги какой-либо неизотропной кривой в V_n*. Вопрос ставится так. Данная кривая

$$x^i = x^i(t) \quad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2) \tag{101.2}$$

варьируется, т. е. включается в некоторое семейство кривых

$$x^i = x^i(t, \alpha) \quad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2), \tag{101.3}$$

зависящих от параметра α. Таким образом, при некотором определенном значении α уравнения (101.3) совпадают с (101.2). Мы будем считать, что при $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ и в том интервале изменения, который пробегает α, функции $x^i(t, \alpha)$ дважды непрерывно дифференцируемы. Вычислим длину кривой семейства согласно (85.10):

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}\,dt.$$

Так как x^i зависят не только от t, но и от α, то под знаком корня следовало бы писать частные производные по t с круглыми ∂. Но мы условимся обозначать частные дифференциалы по t символом d, а частные дифференциалы по α — символом δ.

Полученная длина s кривой семейства зависит, конечно, от выбора этой кривой, т. е. от параметра α. С формальной стороны это сказывается в том, что α входит как параметр в подынтегральное выражение через $x^i(t, \alpha)$, от которых зависят $g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$, и через $\frac{dx^i(t, \alpha)}{dt}$.

Вычислим теперь вариацию длины кривой s, т. е. ее дифференциал δs по аргументу α:

$$\delta s = \int_{t_1}^{t_2} \delta \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta\left(g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}\right)}{2\sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}}}\, dt. \tag{101.4}$$

Предположение о неизотропности кривой, длину дуги которой мы варьируем, как мы видим, весьма существенно: иначе знаменатель подынтегрального выражения, равный $2\frac{ds}{dt}$, обращался бы в нуль. Обыкновенный дифференциал δ от инварианта $g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}$ можно заменить соответствующим абсолютным дифференциалом $\tilde{D}$ (тоже при бесконечно малом смещении по линии α при постоянном t):

$$\delta\left(g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\right) = \tilde{D}\left(g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\right) = g_{ij}\tilde{D}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} + g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\tilde{D}\frac{dx^j}{dt} =$$

$$= 2g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\tilde{D}\frac{dx^j}{dt}. \tag{101.5}$$

Мы воспользовались здесь равенствами $\tilde{D}g_{ij} = 0$ и $g_{ij} = g_{ji}$; последнее позволило объединить два полученных члена.

Запишем в развернутом виде $\tilde{D}\frac{dx^j}{dt}$:

$$\tilde{D}\frac{dx^j}{dt} = \delta\frac{dx^j}{dt} + \Gamma^j_{kp}\frac{dx^p}{dt}\delta x^k = \frac{d}{dt}\delta x^j + \Gamma^j_{pk}\delta x^k\frac{dx^p}{dt} = \frac{D\delta x^j}{dt}.$$

В процессе преобразования мы изменили порядок частных дифференцирований d и δ, а также переставили нижние индексы у Γ^j_{kp};

это законно, так как риманова связность без кручения. Через D мы обозначаем абсолютный дифференциал, отвечающий бесконечно малому смещению dt по кривой семейства (при постоянном α). Теперь (101.5) принимает вид

$$\delta\left(g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\right)=2g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{D\delta x^j}{dt}.$$

Возвращаясь к (101.4), заменяем числитель полученным выражением, а знаменатель — через $2\frac{ds}{dt}$. В результате имеем:

$$\delta s=\int_{t_1}^{t_2} g_{ij}\frac{dx^i}{ds}D\delta x^j. \qquad (101.6)$$

Распространяя действие символа D на все подынтегральное выражение и вычитая возникающие вследствие этого лишние члены, получаем:

$$\delta s=\int_{t_1}^{t_2} D\left(g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\delta x^j\right)-\int_{t_1}^{t_2} g_{ij}D\frac{dx^i}{ds}\delta x^j. \qquad (101.7)$$

Под знаком первого интеграла стоит абсолютный дифференциал D от инварианта. Его можно заменить, следовательно, обыкновенным дифференциалом d; производя интегрирование, получим:

$$\delta s=\left[g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\delta x^j\right]_2-\left[g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\delta x^j\right]_1-\int_{t_1}^{t_2} g_{ij}D\frac{dx^i}{ds}\delta x^j. \qquad (101.8)$$

Значки 1, 2 указывают, что соответствующее выражение вычисляется при $t=t_1$ и при $t=t_2$, т. е. в начальной и конечной точках кривой. В формуле (101.8) длина дуги s может быть как вещественной, так и чисто мнимой: $s=\sigma i$. Для определенности мы будем заниматься лишь первым случаем, имея в виду, что второй можно трактовать совершенно аналогично. Нужно только поделить обе части равенства на i, после чего в левой части δs заменится на $\delta\sigma$, а в правой части ds (в знаменателях) заменится на $-d\sigma$. Тем самым мнимые величины будут исключены, и вместо s мы будем рассматривать σ.

Когда мы от данной кривой семейства с определенным значением параметра α переходим к бесконечно близкой кривой $\alpha+\delta\alpha$, причем каждая точка кривой α переходит в точку кривой $\alpha+\delta\alpha$ с прежним значением t, то векторы соответствующих бесконечно малых смещений суть $\delta x^i(t, \alpha)$.

Поэтому проинтегрированные члены представляют собой проекции вектора бесконечно малого смещения δx^j на единичный касательный вектор $\frac{dx^i}{ds}$ в начале и конце кривой (собственно говоря, в прямых скобках стоят скалярные произведения, но скалярное произведение какого-либо вектора на единичный вектор равно его проекции на направление этого единичного вектора). Нетрудно уяснить себе из наглядных соображений, что такого рода проекция в конце кривой дает, действительно, удлинение кривой, вызванное смещением ее конца; то же самое имеет место и в начале кривой, только проекцию нужно взять с обратным знаком.

Если концы варьируемой кривой закреплены, т. е.

$$x^i(t_1,\ \alpha) = \text{const}, \quad x^i(t_2,\ \alpha) = \text{const}, \tag{101.9}$$

при переменном α, то δx^i на концах кривой обращаются в нуль. Проинтегрированные члены исчезают, и (101.8) принимает вид

$$\delta s = -\int_{t_1}^{t_2} g_{ij} D\frac{dx^i}{dt}\,\delta x^j. \tag{101.10}$$

Предположим, что рассматриваемая кривая (101.2) *стационарной длины*. Под этим мы будем понимать, что, варьируя эту кривую любым образом, однако при условии неподвижности ее концов, мы всегда будем получать $\delta s = 0$. Тогда (101.10) дает

$$\int_{t_1}^{t_2} g_{ij} D\frac{dx^i}{ds}\,\delta x^j = 0$$

при любом выборе $\frac{\delta x^j}{\delta\alpha}$ как непрерывно дифференцируемых функций от t. По основной лемме вариационного исчисления отсюда следует обращение в нуль тех функций от t, которые служат коэффициентами при δx^j под знаком интеграла:

$$g_{ij} D\frac{dx^i}{ds} = 0.$$

Поскольку, таким образом, тензор $D\frac{dx^i}{ds}$ равен нулю после опускания индекса, то, поднимая индекс обратно, мы получаем:

$$D\frac{dx^i}{ds} = 0.$$

Это равенство означает, что касательный вектор $\frac{dx^i}{ds}$ параллельно переносится вдоль нашей кривой. Отсюда следует (§ 90), что *наша кривая является геодезической, а длина дуги s служит вдоль нее каноническим параметром.*

Обратно, пусть кривая (101.2) — *неизотропная геодезическая.* Тогда $\frac{dx^i}{ds}$ есть параллельно переносимый вдоль геодезической касательный вектор, так что

$$D\frac{dx^i}{ds}=0 \tag{101.11}$$

и (101.10) дает нам при любых δx^j

$$\delta s=0.$$

Таким образом, вариация длины геодезической линии с закрепленными концами всегда равна нулю. В итоге мы получаем теорему: *для того чтобы неизотропная линия в римановом пространстве обладала стационарной длиной, необходимо и достаточно, чтобы она была геодезической* (в частности, в евклидовом пространстве R_n — чтобы она была прямой).

Следовательно, неизотропные геодезические получили у нас новую характеристику, как неизотропные линии стационарной длины. В случае собственно риманова V_n все линии неизотропные, так что стационарность длины может служить определением геодезической линии.

Отметим, что для (неизотропной) геодезической формула (101.8) принимает простой вид

$$\delta s=\left[g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\delta x^j\right]_2-\left[g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\delta x^j\right]_1, \tag{101.12}$$

если принять во внимание (101.11).

Итак, вариация длины геодезической вполне определяется векторами бесконечно малых смещений ее концов. При этом не нужно думать, что при вариации геодезической мы требуем, чтобы она переходила снова в геодезическую: семейство, в которое она включается, остается произвольным.

В заключение будет интересно рассмотреть формулу (101.10) уже не специально для геодезической линии, а для кривой общего вида (основного типа, §§ 99, 100). Тогда

$$\frac{dx^i}{ds}=v_0^i$$

и по первой формуле Френе

$$\frac{Dv_0^i}{ds}=\varkappa_1 v_1^i,$$

так что

$$D\frac{dx^i}{ds}=\varkappa_1\nu_1^i\,ds.$$

Теперь (101.10) принимает вид

$$\delta s=-\int_{s_1}^{s_2}\varkappa_1(s)\,g_{ij}\nu_1^i\delta x^j\,ds. \qquad (101.13)$$

Ввиду появления ds под знаком интеграла нам пришлось указать пределы изменения тоже для s. *Итак, вариация длины дуги кривой с закрепленными концами получается следующим образом: проекция вектора бесконечно малого смещения δx^j на первую нормаль ν_1^i умножается на первую кривизну $\varkappa_1$ и на ds, интегрируется по всей кривой, и результат берется с обратным знаком* (если ν_1^i — единичный вектор; если же он мнимоединичный, то формулировка несколько меняется).

§ 102*. Геодезически параллельные гиперповерхности

Для изучения геодезических линий в римановом пространстве V_n и самого V_n в ряде случаев приносят пользу специальные, связанные с геодезическими линиями геометрические конструкции. В частности, они позволяют строить координатные системы в V_n с наиболее простыми свойствами. Конечно, вообще говоря, в V_n нельзя построить такие простые координатные системы, какими являются, например, ортонормированные координатные системы в R_n, но частично все же можно приблизиться к их свойствам.

Выберем в V_n произвольную *неизотропную* гиперповерхность V_{n-1}:

$$x^i=x^i(u^1,\ u^2,\ \ldots,\ u^{n-1}), \qquad (102.1)$$

где параметры u^α ($\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$) пробегают некоторую связную область изменения Ω_u, а функции $x^i(u^\alpha)$ (по крайней мере дважды непрерывно дифференцируемые в Ω_u и на ее границе) удовлетворяют условию (83.4)

$$\text{ранг матрицы}\ \left\|\begin{matrix}\frac{\partial x_1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \ldots & \frac{\partial x^n}{\partial u^1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial x^1}{\partial u^{n-1}} & \frac{\partial x^2}{\partial u^{n-1}} & \ldots & \frac{\partial x^n}{\partial u^{n-1}}\end{matrix}\right\|\ \text{равен}\ n-1. \qquad (102.2)$$

В каждой точке $M\in V_{n-1}$ имеется вполне определенная неизотропная нормаль (в касательном пространстве R_n; см. § 85), единичный